Valószínűségsűrűség funkcionál alakja és transzformációs tulajdonságai

Rudolf Ádám

2012. április 26.

Áttekintés

1. Általános alak Markov-folyamatokra
2. Általános általános alakja Gauss-folyamatokra
3. Tulajdonságok

Áttekintés

1. Általános alak Markov-folyamatokra
2. Általános általános alakja Gauss-folyamatokra
3. Tulajdonságok

Pályaintegrál általános alakja Markov-folyamatokra

Tekintsünk egy $x(t)$ Markov-folyamatot , amit az sztochasztikus differenciálegyenlet határoz meg:

$$\dot{x}(t) = g(x(t)) + h(x(t))\xi(t), \tag{1}$$

ahol $\xi(t)$ Gauss folyamatok 0 várható értékkel. Korrelációs függvénye:

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = N\delta(t - t').$$

Feladatunk a $p[x(t)]$ pályaintegrál konkrét, általános alakjának meghatározása ebben az esetben.

Pályaintegrál általános alakja Markov-folyamatokra

A pályaintegrál a kellően kis időfelbontáshoz tartozó többdimenziós valószínűségsűrűség:

$$p[x(t)] = p(x(t_1), x(t_2), ..., x(t_N)),$$

ahol $t_n = n\varepsilon$ és ε elegendően kicsi. A SDE diszkretizációja általános λ paraméter esetén:

$$x_{t+1} = x_t + \varepsilon g(\tilde{x}) + \varepsilon h(\tilde{x})\xi_t = F(x_t, x_{t+1}, \xi_t), \tag{2}$$

ahol

$$\tilde{x} = \lambda x_{t+1} + (1 - \lambda)x_t.$$

Pályaintegrál általános alakja Markov-folyamatokra

Írjuk fel az átmeneti valószínűséget :

$$P(x_{t+1}|x_t) = \left\langle \delta\left(x_{t+1} - F(x_t, x_{t+1}, \xi_t)\right) \left| 1 - \frac{\partial}{\partial x_{t+1}} F \right| \right\rangle \tag{3}$$

A Jacobi részletesebben:

$$\left| 1 - \frac{\partial}{\partial x_{t+1}} F \right| \approx \exp\left\{ \varepsilon\lambda g'(\tilde{x}) + \varepsilon\lambda h'(\tilde{x}) \left(\frac{\dot{x} - g}{h}\right) + \frac{\varepsilon^2\lambda^2}{2} h'^2 \underbrace{\left(\frac{\dot{x} - g}{h}\right)^2}_{\approx \frac{\dot{x}^2}{h^2}} + \ldots \right\} \tag{4}$$

Felhasználtuk:

$$\xi = \left(\frac{\dot{x} - g}{h}\right) \quad \text{és} \quad \ln(1 - \varepsilon x) \approx -\varepsilon x - \frac{\varepsilon^2 x^2}{2}$$

Pályaintegrál általános alakja Markov-folyamatokra

ξ_t valószínűségsűrűsége:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi h^2(\tilde{x}_t)\varepsilon}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{x}-g}{h}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon}}. \tag{5}$$

Ezekből a $P(x_N, ..., x_1|x_0)$-on keresztül kihozhatjuk a végleges pályaintegrált :

$$\begin{aligned} p[x(t)] = & C \cdot \frac{1}{\prod_{t=1}^{N} h(\tilde{x}_t)} \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2}\int_{(\lambda)} \left(\frac{\dot{x}-g}{h}\right)^2 \mathrm{d}t \right. \\ & \left. - \lambda \int_{(\lambda)} \left[g' - h' \frac{\dot{x}-g}{h} \right] \mathrm{d}t - \frac{\lambda^2}{2} \int_{(\lambda)} h'^2 \mathrm{d}t \right\} \end{aligned} \tag{6}$$

Pályaintegrál általános alakja Markov-folyamatokra

Habár ennek örülünk, ki akarjuk ezt fejezni a Fokker-Planck egyenlet ben szereplő, közvetlenebb fizikai jelentőségű együtthatókkal:

$$\dot{p}(x) = -\frac{\partial}{\partial x}[a(x)p(x)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[b(x)p(x)] \tag{7}$$

A korábbról ismert egyenletek egyszerűsítése 1 dimenzióra:

$$g = a - \lambda h h' \quad \text{és} \quad b = Nh^2$$

Ezeket, továbbá a $\lambda = \frac{1}{2}$, azaz Stratonovich-féle diszkretizálási paramétert beírva a fenti alakba kapjuk:

$$\begin{aligned} p[x(t)] =& \tilde{C} \cdot \frac{1}{\prod_{t=1}^{N} b^{1/2}(\tilde{x}_t)} \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2}\int_{(S)} \mathrm{d}t \right. \\ & \times \left. \left[\frac{\left(\dot{x} - a + \frac{1}{4}b'\right)^2}{b} - a' - \frac{1}{4}b'' - \frac{1}{8}h'^2 \left[\frac{1}{h^2}\mathrm{d}x^2 - N \right] \right] \right\} \end{aligned} \tag{8}$$

Továbbá: $lim_{\varepsilon \to 0} \sum \frac{f(x)}{h^2} \Delta x^2 = \int f(x) N \mathrm{d}t$.

Többdimenziós általánosítás

Ha valaki élvezi ezt, több dimenzióban, több ξ erő mellett is ki lehet számolni. Ekkor az egyenlet a (már látott)

$$\dot{x}_\alpha(t) = g_\alpha(x(t)) + h_{\alpha k}(x(t))\xi_k(t) \tag{9}$$

alakú. Az együtthatók mátrixok lesznek. Levezetés nélkül (szintén $\lambda = \frac{1}{2}$-re):

$$\begin{aligned} p[x(t)] =& \tilde{C} \cdot \prod_{n=1}^{N} \det{}^{-1/2} \| b_{\alpha\beta}(\tilde{x}_n) \| \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{(s)} \mathrm{d}t \right. \\ & \times \left[b^{-1}_{\alpha\beta} \left(\dot{x}_\alpha - a_\alpha + \frac{1}{2} b_{\alpha\gamma,\gamma} \right) \left(\dot{x}_\beta - a_\beta + \frac{1}{2} b_{\beta\delta,\delta} \right) + a_{\alpha,\alpha} + \frac{1}{4} b_{\alpha\beta,\alpha\beta} \right] \\ & \left. -\frac{1}{8} \int_{(s)} h_{\alpha i,\beta} h_{\beta j,\alpha} [h^{-1}_{i\gamma} h^{-1}_{j\delta} \mathrm{d}x_\gamma \, \mathrm{d}x_\delta - N_{ij} \mathrm{d}t] \right\}, \end{aligned} \tag{10}$$

ahol $m_{\alpha,\beta} = \frac{\partial m_\alpha}{\partial x_\beta}$.

Áttekintés

1. Általános alak Markov-folyamatokra
2. Általános általános alakja Gauss-folyamatokra
3. Tulajdonságok

Pályaintegrál Gauss-folyamatokra

Most: új folyamat. SDE ugyanaz:

$$\dot{x}_\alpha(t) = g_\alpha(x(t)) + h_{\alpha k}(x(t))\xi_k(t). \tag{11}$$

ξ erők itt is 0 középértékű, Gauss eloszlású erők, de megengedünk általánosabb korrelációt :

$$\langle \xi_i(t)\xi_j(t')\rangle = r_{ij}(t,t') \tag{12}$$

Levezetés általánosabb, hosszadalmas. A végeredmény illusztrálható.

Pályaintegrál végső alakja

$p[x(t)]$ általános alakja Gauss folyamatok esetén:

$$
\begin{aligned}
p[x(t)] = & \tilde{C} \cdot \prod_{m=1}^{N} \det{}^{-1} \| [h_{\alpha j}(\tilde{x}_m)]_\lambda \| \\
& \times \exp \Bigg[-\frac{1}{2} \int_{(\lambda)} \int_{(\lambda)} \mathrm{d}t \mathrm{d}t' s_{ij}(t,t') \\
& \times [h_{i\alpha}^{-1}(\dot{x}_\alpha - g_\alpha(x)) h_{jb}^{-1}(x')(\dot{x}_\beta - g_\beta(x'))]_\lambda \\
& - \lambda \int_{(\lambda)} \mathrm{d}t [g_{\alpha,\alpha}(x) + h_{\alpha i,\alpha}(x) h_{i\gamma}^{-1}(x)(\dot{x}_\gamma - g_\gamma(x))] \Bigg]
\end{aligned}
\tag{13}
$$

A következők mellett: $x' = x(t')$, λ index az adott függvények megfelelő λ szerinti kiértékelését jelzi.

$s_{ij}(t, t')$ megmagyarázása

Micsoda is ez az új tag: $s_{ij}(t, t')$?

$$\int_0^T s_{ij}(t', t) v_i(t) \mathrm{d}t = u_j(t') \Leftrightarrow \int_0^T r_{ij}(t', t) u_i(t) \mathrm{d}t' = v_j(t) \forall u_j(t') \quad (14)$$

s_{ij} az r_{ij} inverz magfüggvénye. Látható is, hogy Markov-esetben visszaadja az $x' = x$ formát.

Áttekintés

1. Általános alak Markov-folyamatokra
2. Általános általános alakja Gauss-folyamatokra
3. Tulajdonságok

Transzformációs tulajdonságok

Megmutatható, hogy a $x \to y = y(x)$ változócserére a valószínűségsűrűség funkcionál "rendesen" transzformálódik :

$$\bar{p}[y(t)] = \prod_{n=1}^{N} \left[\frac{\mathrm{D}x(y)}{\mathrm{D}y}_{y=y(t_n)} \right] \cdot p[x(y(t))], \tag{15}$$

ahol $\frac{\mathrm{D}x(y)}{\mathrm{D}y}_{y=y(t_n)}$ a transzformáció Jacobija. (ξ nem változik a transzformációra.)

Speciális eset : $\mathrm{d}y_i = h_{i\alpha}^{-1}\mathrm{d}x_\alpha$:

$$\begin{aligned} p[y(t)] =& C \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2} \int_{(\lambda)} \int_{(\lambda)} \mathrm{d}t\mathrm{d}t' s_{ij}(t,t')[(\dot{y}_i - g_i(y)) \right. \\ & \left. \times (\dot{y}_j - g_j(y))] - \lambda \int_{(\lambda)} \mathrm{d}t\, g_{i,i}(y) \right\} \end{aligned} \tag{16}$$

A sűrűségfunkcionál λ függése

Ha $h_{\alpha i}$ független λ-tól, egyszerűbb alak:

$$p[x(t)] = C \cdot \exp\left\{ \int_{(\lambda)} \mathrm{d}t [b^{-1}_{\alpha\beta}(\dot{x}_\alpha - g_\alpha)(\dot{x}_\beta - g_\beta) + g_{\alpha,\alpha}] + (\lambda - \frac{1}{2} \int_{(\lambda)} b^{-1}_{\alpha\beta} g_{\alpha,\gamma}(\mathrm{d}x_\beta \mathrm{d}x_\gamma - b_{\beta\gamma}\mathrm{d}t) \right\} \tag{17}$$

Az utolsó tag itt is eltűnik a limeszben.
Megyjegyzés : nem Markov-folyamatokra, ha elég korreláltak a ξ-k, az egész $p[x(t)]$ sűrűségfunkcionál λ független lehet.

Kérdések?

Köszönöm a figyelmet! Forrás:

R. L. Stratonovich: Some Markov methods in the theory of stochastic processes in nonlinear dynamic systems