3D metrikák, Friedmann-univerzum

Rudolf Ádám és Májer Imre

2010. november 26.

Áttekintés

1 Emlékeztető

2 3D metrikák

3 A standard modell

4 Friedmann-egyenletek

5 Friedmann-egyenlet megoldása

6 Friedmann-univerzum

Áttekintés

1 Emlékeztető

2 3D metrikák

3 A standard modell

4 Friedmann-egyenletek

5 Friedmann-egyenlet megoldása

6 Friedmann-univerzum

Emlékeztető

Geometriai sokaságon görbe

$$x^i = x^i(\lambda) \tag{1}$$

A görbe érintője

$$V^i = \frac{dx^i}{d\lambda} \tag{2}$$

Áttérés vesszős koordinátákra

$$V'^i = \frac{dx'^i}{d\lambda} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\frac{dx^j}{d\lambda} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}V^j \tag{3}$$

Kontravariáns vektorok

$$U'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}U^j \tag{4}$$

Kovariáns vektorok

$$U'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}U_j \tag{5}$$

Emlékeztető

Általánosítva: tenzor

$$T'^{ij}{}_k = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x'^j}{\partial x^m}\frac{\partial x^p}{\partial x'^k}T^{lm}{}_p \tag{6}$$

Nem transzformálódik: skalár (0. rendű tenzor). Skalár képezhető kontravariáns és kovariáns indexpár összeejtéséből, pl. $U^i V_i$, T^i_i, $R^i{}_{jil}$.
Metrika: távolság a sokaságon (=geodetikus hossza)
Metrikus tenzor: $g_{ij} = g_{ji}$

$$dl^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j \tag{7}$$

Kontravariáns <-> kovariáns: metrikus tenzor

$$g_{ij}U^j = U_i \qquad g^{ij}U_j = U^i \tag{8}$$

$$g^{ik}g_{ki} = \delta^i_k \tag{9}$$

Emlékeztető

Kovariáns derivált

$$\nabla_j V^i = \frac{\partial V^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} V^k \tag{10}$$

Christoffel-szimbólum: $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ - nem tenzor!

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) \tag{11}$$

Görbületet jellemzik: Riemann-tenzor, Ricci-tenzor, Ricci-skalár

$$R^i{}_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{lj} - \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{kj} \tag{12}$$

$$R_{jl} = R^i{}_{jil} = \frac{\partial \Gamma^i_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^i_{ij}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{im}\Gamma^m_{lj} - \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{ij} = R_{lj} \tag{13}$$

$$R = R^j_j = g^{jl} R_{jl} \tag{14}$$

Áttekintés

1 Emlékeztető

2 3D metrikák

3 A standard modell

4 Friedmann-egyenletek

5 Friedmann-egyenlet megoldása

6 Friedmann-univerzum

3D metrikák

(2D) gömb = 3D euklideszi metrikában meghatározott felület

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{15}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \tag{16}$$

Általánosítás: 3D gömb = 4D euklideszi metrikában meghatározott "felület":

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + du^2 \tag{17}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = a^2 \tag{18}$$

Az a paraméterű 3D gömb "felszínén" χ, θ, φ gömbi koordináták:

$$u = a\cos\chi \qquad z = a\sin\chi\cos\theta \tag{19}$$

$$y = a\sin\chi\sin\theta\sin\varphi \qquad x = a\sin\chi\sin\theta\cos\varphi \tag{20}$$

3D metrikák

$$du = -a \sin\chi \, d\chi$$

$$dz = a \cos\chi \cos\theta \, d\chi - a \sin\chi \sin\theta \, d\theta$$

$$dy = a \cos\chi \sin\theta \sin\varphi \, d\chi + a \sin\chi \cos\theta \sin\varphi \, d\theta + a \sin\chi \sin\theta \cos\varphi \, d\varphi$$

$$dx = a \cos\chi \sin\theta \cos\varphi \, d\chi + a \sin\chi \cos\theta \cos\varphi \, d\theta - a \sin\chi \sin\theta \sin\varphi \, d\varphi$$

A következő kijön, de nem vezetném le...

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + du^2 = a^2 \left(d\chi^2 + \sin^2\chi \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2 \right) \right)$$

Könnyen leolvasható, hogy a metrikus tenzor diagonális

$$g_{\chi\chi} = a^2 \qquad g_{\theta\theta} = a^2 \sin^2\chi \qquad g_{\varphi\varphi} = a^2 \sin^2\chi \sin^2\theta \tag{21}$$

Mivel g_{ij} diagonális: $g^{\chi\chi} = 1/g_{\chi\chi}$, $g^{\theta\theta} = 1/g_{\theta\theta}$, $g^{\varphi\varphi} = 1/g_{\varphi\varphi}$

3D metrikák

Origó a gömb bármely pontján felvehető ($\chi = \theta = \varphi = 0$).
Ívelem hossza ($d\theta = d\varphi = 0$)

$$r = \int dl = \int_0^\chi a\, d\chi' = a\chi \tag{22}$$

$r = a\chi$ sugarú 2D gömb felszíne ($d\chi = 0$).

$$dl^2 = a^2 \sin^2\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) = r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

$$S_2 = 4\pi a^2 \sin^2\chi = 4\pi a^2 \sin^2 \frac{r}{a}$$

A teles 3D gömb térfogata

$$V_3 = \int S_2(r)\, dr = \int_0^\pi 4\pi a^2 \sin^2\chi\, a\, d\chi = 2\pi^2 a^3$$

3D metrikák

Christoffel-szimbólumok - egy kis számolgatás

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) \tag{23}$$

$$g_{\chi\chi} = a^2 \qquad g_{\theta\theta} = a^2 \sin^2 \chi \qquad g_{\varphi\varphi} = a^2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta \tag{24}$$

$$\Gamma^\chi_{\chi\chi} = \frac{1}{2} g^{\chi\chi} \left(\frac{\partial g_{\chi\chi}}{\partial \chi} + \frac{\partial g_{\chi\chi}}{\partial \chi} - \frac{\partial g_{\chi\chi}}{\partial \chi} \right) = 0, \quad \Gamma^\theta_{\theta\theta} = 0, \quad \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} = 0$$

$$\Gamma^\chi_{\theta\varphi} = \Gamma^\chi_{\varphi\theta} = \Gamma^\theta_{\chi\varphi} = \Gamma^\theta_{\varphi\chi} = \Gamma^\varphi_{\chi\theta} = \Gamma^\varphi_{\theta\chi} = 0$$

$$\Gamma^\theta_{\chi\chi} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(-\frac{\partial g_{\chi\chi}}{\partial \theta} \right) = 0, \quad \Gamma^\varphi_{\chi\chi} = \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi} \left(-\frac{\partial g_{\chi\chi}}{\partial \varphi} \right) = 0$$

$$\Gamma^\chi_{\chi\theta} = \frac{1}{2} g^{\chi\chi} \left(\frac{\partial g_{\chi\chi}}{\partial \theta} \right) = 0 = \Gamma^\chi_{\theta\chi}, \quad \Gamma^\chi_{\chi\varphi} = \frac{1}{2} g^{\chi\chi} \left(\frac{\partial g_{\chi\chi}}{\partial \varphi} \right) = 0 = \Gamma^\chi_{\varphi\chi}$$

3D metrikák

Christoffel-szimbólumok - még egy kis számolgatás

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) \tag{25}$$

$$g_{\chi\chi} = a^2 \qquad g_{\theta\theta} = a^2 \sin^2 \chi \qquad g_{\varphi\varphi} = a^2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta \tag{26}$$

$$\Gamma^\chi_{\theta\theta} = \frac{1}{2} g^{\chi\chi} \left(-\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \chi} \right) = \frac{1}{2a^2} (-a^2 2 \sin \chi \cos \chi) = -\frac{\sin 2\chi}{2}$$

$$\Gamma^\varphi_{\theta\theta} = \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi} \left(-\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \varphi} \right) = 0$$

$$\Gamma^\theta_{\theta\chi} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \chi} \right) = \frac{1}{2a^2 \sin^2 \chi} (a^2 2 \sin \chi \cos \chi) = \cot \chi = \Gamma^\theta_{\chi\theta}$$

$$\Gamma^\theta_{\theta\varphi} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \varphi} \right) = 0 = \Gamma^\theta_{\varphi\theta}$$

3D metrikák

Christoffel-szimbólumok - már nincs sok hátra

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) \tag{27}$$

$$g_{\chi\chi} = a^2 \qquad g_{\theta\theta} = a^2 \sin^2 \chi \qquad g_{\varphi\varphi} = a^2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta \tag{28}$$

$$\Gamma^\chi_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} g^{\chi\chi} \left(-\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \chi} \right) = \frac{1}{2a^2} (-a^2 \sin^2 \theta 2 \sin \chi \cos \chi) = -\frac{\sin^2 \theta \sin 2\chi}{2}$$

$$\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(-\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{2a^2 \sin^2 \chi} (-a^2 \sin^2 \chi 2 \sin \theta \cos \theta) = -\frac{\sin 2\theta}{2}$$

$$\Gamma^\varphi_{\varphi\chi} = \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi} \left(\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \chi} \right) = \frac{1}{2a^2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta} (a^2 \sin^2 \theta 2 \sin \chi \cos \chi) = \cot \chi = \Gamma^\varphi_{\chi\varphi}$$

$$\Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi} \left(\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{2a^2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta} (a^2 \sin^2 \chi 2 \sin \theta \cos \theta) = \cot \theta = \Gamma^\varphi_{\theta\varphi}$$

3D metrikák

Szedjük össze mégegyszer ide a nem zérus Christoffel-szimbólumokat!

$$\Gamma^{\chi}_{\theta\theta} = -\frac{\sin 2\chi}{2}, \qquad \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} - \frac{\sin 2\theta}{2}, \qquad \Gamma^{\chi}_{\varphi\varphi} = -\frac{\sin^2\theta \sin 2\chi}{2}$$

$$\Gamma^{\theta}_{\theta\chi} = \Gamma^{\theta}_{\chi\theta} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi\chi} = \Gamma^{\varphi}_{\chi\varphi} = \cot\chi, \qquad \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \cot\theta$$

Számoljuk ki a 3D gömb görbületét, azaz Ricci-skalárját:

$$R = R^{j}_{j} = g^{jl} R_{jl} = \frac{R_{\chi\chi}}{g_{\chi\chi}} + \frac{R_{\theta\theta}}{g_{\theta\theta}} + \frac{R_{\varphi\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \tag{29}$$

Kellenek a Ricci-tenzor diagonális elemei! Nincs mit tenni, számoljunk! Idézzük hát fel a Ricci-tenzor képletét:

$$R_{jl} = \frac{\partial \Gamma^{i}_{lj}}{\partial x^{i}} - \frac{\partial \Gamma^{i}_{ij}}{\partial x^{l}} + \Gamma^{i}_{im}\Gamma^{m}_{lj} - \Gamma^{i}_{lm}\Gamma^{m}_{ij} \tag{30}$$

3D metrikák

$$R_{\chi\chi} = \frac{\partial \Gamma^i_{\chi\chi}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^i_{i\chi}}{\partial \chi} + \Gamma^i_{im}\Gamma^m_{\chi\chi} - \Gamma^i_{\chi m}\Gamma^m_{i\chi} = -\frac{\partial \Gamma^\theta_{\theta\chi}}{\partial \chi} - \frac{\partial \Gamma^\varphi_{\varphi\chi}}{\partial \chi} - \Gamma^\theta_{\chi\theta}\Gamma^\theta_{\theta\chi} - \Gamma^\varphi_{\chi\varphi}\Gamma^\varphi_{\varphi\chi} =$$

$$= \frac{1}{\sin^2\chi} - \cot^2\chi - \cot^2\chi = \frac{2(1-\cos^2\chi)}{\sin^2\chi} = 2$$

$$R_{\theta\theta} = \frac{\partial \Gamma^i_{\theta\theta}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^i_{i\theta}}{\partial \theta} + \Gamma^i_{im}\Gamma^m_{\theta\theta} - \Gamma^i_{\theta m}\Gamma^m_{i\theta} = \frac{\partial \Gamma^\chi_{\theta\theta}}{\partial \chi} - \frac{\partial \Gamma^\varphi_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \Gamma^\theta_{\theta\chi}\Gamma^\chi_{\theta\theta} + \Gamma^\varphi_{\varphi\chi}\Gamma^\chi_{\theta\theta}$$

$$- \Gamma^\theta_{\theta\chi}\Gamma^\chi_{\theta\theta} - \Gamma^\chi_{\theta\theta}\Gamma^\theta_{\chi\theta} - \Gamma^\varphi_{\theta\varphi}\Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = -\cos 2\chi - \left(-\frac{1}{\sin^2\theta}\right) - \cot^2\theta =$$

$$= 2\sin^2\chi$$

3D metrikák

$$R_{\varphi\varphi} = \frac{\partial \Gamma^i_{\varphi\varphi}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^i_{i\varphi}}{\partial \varphi} + \Gamma^i_{im}\Gamma^m_{\varphi\varphi} - \Gamma^i_{\varphi m}\Gamma^m_{i\varphi} = \frac{\partial \Gamma^\chi_{\varphi\varphi}}{\partial \chi} + \frac{\partial \Gamma^\theta_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} + \Gamma^\theta_{\theta\chi}\Gamma^\chi_{\varphi\varphi}$$
$$+ \Gamma^\varphi_{\varphi\chi}\Gamma^\chi_{\varphi\varphi} + \Gamma^\varphi_{\varphi\theta}\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} - \Gamma^\varphi_{\varphi\chi}\Gamma^\chi_{\varphi\varphi} - \Gamma^\varphi_{\varphi\theta}\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} - \Gamma^\chi_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi_{\chi\varphi} - \Gamma^\theta_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi_{\theta\varphi} =$$
$$- \sin^2\theta\cos 2\chi - \cos 2\theta + \cot\theta\frac{\sin 2\theta}{2} = 2\sin^2\theta\sin^2\chi$$

Nagyszerű! Beírjuk őket a Ricci-skalár kifejezésébe

$$R = \frac{R_{\chi\chi}}{g_{\chi\chi}} + \frac{R_{\theta\theta}}{g_{\theta\theta}} + \frac{R_{\varphi\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} = \frac{2}{a^2} + \frac{2\sin^2\chi}{a^2\sin^2\chi} + \frac{2\sin^2\chi\sin^2\theta}{a^2\sin^2\chi\sin^2\theta} = \frac{6}{a^2}$$

3D metrikák

Az eddigi levezetések a 3D gömbre voltak érvényesek.

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + k\,du^2$$

$$k(x^2 + y^2 + z^2) + u^2 = a^2$$

$$R = k\frac{6}{a^2}$$

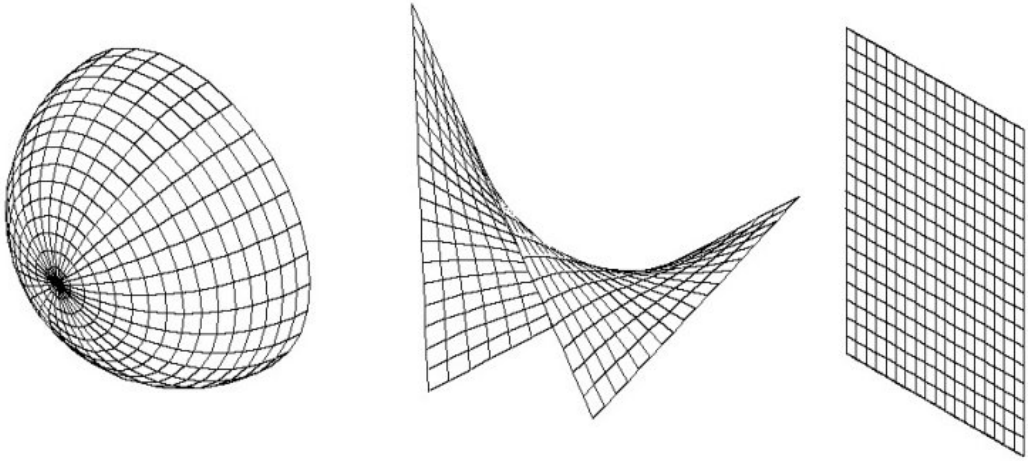
$k = 1$ 3D gömb

$k = -1$ 3D pszeudogömb

$k = 0$ 3D euklideszi sík

3D metrikák

Teljesen szimmetrikus 3D metrikák



- A 3D gömb a 2D gömb általánosítása, $R = \frac{6}{a^2}$, a 2D gömb felülete $S_2 = 4\pi a^2 sin^2 \frac{r}{a}$, tehát $4\pi r^2$-nél lassabban nő.
- A 3D pszeudogömb az egyköpenyű forgáshiperboloid általánosítása, a benne foglalt 2D gömb felülete $\overline{S}_2 = 4\pi a^2 sh^2 \frac{r}{a}$, tehát $4\pi r^2$-nél gyorsabban nő. Riemann görbülete $R = -\frac{6}{a^2}$, tehát minden pontja nyeregpont.
- A 3D euklideszi sík a görbületlen 3D, benne a 2D gömb felülete a megszokott r^2-es összefüggéssel nő.

Áttekintés

1 Emlékeztető

2 3D metrikák

3 A standard modell

4 Friedmann-egyenletek

5 Friedmann-egyenlet megoldása

6 Friedmann-univerzum

A standard modell

A kozmológia standard modellje az Einstein-egynletre:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} - \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}, \tag{31}$$

és három alapfeltevésre épül:

- Átlagolási hipotézis: kisimított anyagsűrűség, metrika
- Kozmológiai elv: a kisimított metrika homogén és izotróp -> 3D gömb, pszeudogömb, euklideszi tér!
- Nyugvó objektumok hipotézise: galaxisok nyugszanak a kisimított metrikában

Az utóbbi erőteljesebb magyarázatra szorul. Robertson-Walker metrika: skálafüggés

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - dl^2 = \begin{cases} c^2\, dt^2 - a^2(t)\left[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi)\right] & \text{ha } k = +1 \\ c^2\, dt^2 - a^2(t)\left[d\chi^2 + \sinh^2\bar{\chi}(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi)\right] & \text{ha } k = -1 \\ c^2\, dt^2 - b^2(t)\left[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi)\right] & \text{ha } k = 0 \end{cases}$$

A standard modell

Nyugvó objektumok hipotézise nem rossz a geodetikus hipotézis alapján, mert RW metrikában $x^i(t) = (ct_0 + ct, x_0, y_0, z_0)$ geodetikus. Ezt lássuk be. A geodetikus egyenlet:

$$\frac{d^2x^i}{d\lambda^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda} = 0 \tag{32}$$

Itt most $\lambda = t$ a görbét leíró paraméter.

$$c^2\Gamma^i_{jk}\delta^j_t\delta^k_t = c^2\Gamma^i_{tt}? =?0$$

RW metrika csak egy újabb diagonális elemmel bővítette a korábbi metrikus tenzort (nem teljesen igaz ez így, mert a többi tag negálódott), ráadásul az is $g_{tt} = c^2 =$konstans. Ezért $\Gamma^i_{tt} = 0$. Tehát a nyugvó helykoordinátájú pontok tényleg geodetikusak.
Tehát az RW metrikára keressük az Einstein-egyenletek megoldását.

A standard modell

A Hubble-konstans!
RW homogén, izotróp metrika, ugyanúgy tudom leírni az egészet, akármilyen koord. rendszert választok. Egy galaxis távolsága legyen $l(t) = a(t)\chi_g$ (Ezt 3D gömbre láttuk be, de pszeudogömbön vehetjük e helyett az $l(t) = a(t)\overline{\chi}_g$-t, euklideszi térben pedig az $l(t) = b(t)r$-t). χ_g időben állandó.
Vegyük az egyenlet logaritmusát, majd deriváljuk le:

$$ln\left(l(t)\right) = ln\left(a(t)\chi_g\right)$$

$$\frac{\dot{l}}{l} = \frac{\dot{a}\chi_g}{a\chi_g} = \frac{\dot{a}}{a} = H(t)$$

$$H(t_0) = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} := H_0 = \frac{\dot{a}_0}{a_0}$$

H_0 a Hubble-állandó.

A standard modell

Tehát az RW metrikára keressük az Einstein-egyenletek megoldását.
Hogyan módosul a 3D gömbél, pszeudogömbnél, euklideszi térnél kiszámolt görbület az időkoordináta bevezetésével.

$$g_{tt} = c^2 \qquad g_{\chi\chi} = -a(t)^2 \qquad g_{\theta\theta} = -a(t)^2 \sin^2\chi \qquad g_{\varphi\varphi} = -a(t)^2 \sin^2\chi \sin^2\theta$$

$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ Christoffel-szimbólumok változatlanok (a görög betűk csak a helykoordinátákat jelölik).

$$\Gamma^{i}_{tt} = 0$$

$$\Gamma^{t}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{tt} \left(-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{2c^2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t} = -\frac{\dot{a}}{ac^2} g_{\alpha\beta}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta t} = \Gamma^{\alpha}_{t\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} \left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} 2 \frac{\dot{a}}{a} = \delta^{\alpha}_{\beta} \frac{\dot{a}}{a}$$

A standard modell

Elkezdjük kiszámolni a Ricci-skalárt

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^i_{\beta\alpha}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^i_{i\alpha}}{\partial x^\beta} + \Gamma^i_{im}\Gamma^m_{\beta\alpha} - \Gamma^i_{\beta m}\Gamma^m_{i\alpha} = \frac{\partial \Gamma^\gamma_{\beta\alpha}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial \Gamma^t_{\beta\alpha}}{\partial t} - \frac{\partial \Gamma^\gamma_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma^t_{t\alpha}}{\partial x^\beta}$$

$$+ \Gamma^\gamma_{\gamma\delta}\Gamma^\delta_{\beta\alpha} + \Gamma^t_{t\delta}\Gamma^\delta_{\beta\alpha} + \Gamma^\gamma_{\gamma t}\Gamma^t_{\beta\alpha} + \Gamma^t_{tt}\Gamma^t_{\beta\alpha} - \Gamma^\gamma_{\beta\delta}\Gamma^\delta_{\gamma\alpha} - \Gamma^t_{\beta\delta}\Gamma^\delta_{t\alpha} - \Gamma^\gamma_{\beta t}\Gamma^t_{\gamma\alpha}$$

$$- \Gamma^t_{\beta t}\Gamma^t_{t\alpha} = \left[\frac{\partial \Gamma^\gamma_{\beta\alpha}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma^\gamma_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} + \Gamma^\gamma_{\gamma\delta}\Gamma^\delta_{\beta\alpha} - \Gamma^\gamma_{\beta\delta}\Gamma^\delta_{\gamma\alpha}\right] + \frac{\partial \Gamma^t_{\beta\alpha}}{\partial t} + \Gamma^\gamma_{\gamma t}\Gamma^t_{\beta\alpha}$$

$$- \Gamma^t_{\beta\delta}\Gamma^\delta_{t\alpha} - \Gamma^\gamma_{\beta t}\Gamma^t_{\gamma\alpha} = R^{\text{tér}}_{\alpha\beta} - \frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{c^2a^2}g_{\beta\alpha} - 2\frac{\dot{a}^2}{a^2c^2}g_{\alpha\beta} - \delta^\gamma_\gamma\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{a}}{ac^2}g_{\beta\alpha}$$

$$+ \frac{\dot{a}}{ac^2}g_{\beta\delta}\delta^\delta_\alpha\frac{\dot{a}}{a} + \delta^\gamma_\beta\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{a}}{ac^2}g_{\gamma\alpha} = R^{\text{tér}}_{\alpha\beta} - \frac{\ddot{a}}{c^2a}g_{\beta\alpha} - 2\frac{\dot{a}^2}{a^2c^2}g_{\alpha\beta}$$

A standard modell

Befejezzük a Ricci-skalár kiszámolását

$$R_{tt} = -\frac{\partial \Gamma^i_{it}}{\partial t} - \Gamma^i_{tm}\Gamma^m_{it} = -3\frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} - \delta^\alpha_\beta \frac{\dot{a}}{a}\delta^\beta_\alpha \frac{\dot{a}}{a} = -3\frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + g^{tt}R_{tt} = g^{\alpha\beta}R^{\text{tér}}_{\alpha\beta} - 2\frac{\dot{a}^2}{a^2c^2}g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} - \frac{\ddot{a}}{c^2a}g_{\beta\alpha}g^{\alpha\beta} - 3\frac{\ddot{a}}{c^2a} =$$
$$-k\frac{6}{a^2} - \frac{6(\ddot{a}a + \dot{a}^2)}{a^2c^2}$$

Kérdések?

Ezzel köszönöm a figyelmet, Imre rögtön folytatja innen!

Áttekintés

1 Emlékeztető

2 3D metrikák

3 A standard modell

4 Friedmann-egyenletek

5 Friedmann-egyenlet megoldása

6 Friedmann-univerzum

Friedmann-egyenletek

Standard modell $\longrightarrow$ Friedmann-egyenlet

Einstein-egyenlet

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} - \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} \tag{33}$$

Szorzás g^{jk}-val

$$R_i^k - \frac{1}{2} R \delta_i^k - \Lambda \delta_i^k = \frac{8\pi G}{c^4} T_i^k$$

Egy ismeretlen függvény, $a(t) \Rightarrow$ csak tt komponens

$$R_t^t - \frac{1}{2} R - \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} T_t^t$$

Robertson-Walker metrika

$$R_t^t = -3 \frac{\ddot{a}}{a c^2} \qquad R = -k \frac{6}{a^2} - \frac{6\left(\dot{a}^2 + a\ddot{a}\right)}{c^2 a^2} \tag{34}$$

Friedmann-egyenletek

$$-3\frac{\ddot{a}}{ac^2} - \frac{1}{2}\left[-k\frac{6}{a^2} - \frac{6\left(\dot{a}^2 + a\ddot{a}\right)}{a^2c^2}\right] - \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_t^t$$

Energia-impulzus tenzor: $T_t^t = w = \rho c^2 + w_r$.

- EM-sugárzás energiasűrűsége: w_r
- Nyugvó objektumok hipotézise: $\varnothing$ belső energia, $\varnothing$ nyomás

Első Friedmann-egyenlet

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\left(\rho c^2 + w_r\right) + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2} \tag{35}$$

- Kozmológiai elv: $\rho(t)$, $w_r(t) \Rightarrow \rho(a(t))$, $w_r(a(t))$
- Nyugvó objektumok hipotézise:

$$\rho(t) = \frac{\rho_0 a_0^3}{a^3(t)} \tag{36}$$

Friedmann-egyenletek

Einstein-egyenlet (33) kontrakciója

$$g^{ij}R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}g^{ij}R - \Lambda g_{ij}g^{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij}g^{ij}$$

Az EM energia-impulzus tenzor spúrtalan:

$$-R - 4\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}\rho c^2$$

$$k\frac{6}{a^2} + \frac{6\left(\ddot{a}a + \dot{a}^2\right)}{c^2a^2} - 4\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}\rho c^2$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\frac{kc^2}{6} + \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{2}{3}\Lambda c^2 = \frac{4\pi G}{3c^2}\rho c^2$$

Első Friedmann-egyenletből (35) $(\dot{a}/a)^2$

$$\frac{8\pi G}{3c^2}\left(\rho c^2 + w_r\right) + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2}\frac{kc^2}{6} + \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{2}{3}\Lambda c^2 = \frac{4\pi G}{3c^2}\rho c^2$$

Friedmann-egyenletek

Második Friedmann-egyenlet

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}\left(\rho c^2 + 2w_r\right)a + \frac{\Lambda}{3}c^2 a \tag{37}$$

Első Friedmann-egyenlet (35) időderiválása

$$2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}\left(\dot{\rho}c^2 + \dot{w}_r\right) + 2\frac{kc^2}{a^3}\dot{a}$$

$$\ddot{a} - \frac{\dot{a}^2}{a} = \frac{4\pi G}{3c^2}\left(\dot{\rho}c^2 + \dot{w}_r\right)\frac{a^2}{\dot{a}} + \frac{kc^2}{a}$$

Második Friedmann-egyenletből (37) $\ddot{a}$

$$-\frac{4\pi G}{3c^2}\left(\rho c^2 + 2w_r\right)a + \frac{\Lambda}{3}c^2 a - \frac{\dot{a}^2}{a} = \frac{4\pi G}{3c^2}\left(\dot{\rho}c^2 + \dot{w}_r\right)\frac{a^2}{\dot{a}} + \frac{kc^2}{a}$$

Friedmann-egyenletek

$$-\frac{4\pi G}{3c^2}\left(\rho c^2 a^2 - \dot{\rho} c^2 \frac{a^2}{\dot{a}}\right) - \frac{4\pi G}{3c^2}\left(2w_r a - \dot{w}_r \frac{a^2}{\dot{a}}\right) = \dot{a}^2 + kc^2 + \frac{\Lambda}{3}c^2 a$$

$\dot{a}^2$ az első Friedmann-egyenletből (35)

$$-\frac{4\pi G}{3c^2}\left(\rho c^2 a^2 - \dot{\rho} c^2 \frac{a^2}{\dot{a}}\right) - \frac{4\pi G}{3c^2}\left(2w_r a - \dot{w}_r \frac{a^2}{\dot{a}}\right) = \frac{8\pi G}{3c^2}\left(\rho c^2 + w_r\right) a^2$$

$$\left(3\rho c^2 a^3 \dot{a} - \dot{\rho} c^2 a^4\right) + \left(4w_r a^3 \dot{a} - \dot{w}_r a^4\right)$$

$$a\frac{d}{dt}\left(a^3 \rho c^2\right) + \frac{d}{dt}\left(a^4 w_r\right) = 0 \tag{38}$$

(36) miatt az első tag zérus. Megoldva w_r-re:

$$w_r(t) = \frac{w_{r0} a_0^4}{a^4(t)} \tag{39}$$

Friedmann-egyenletek

$\rho(t)$ (36) és $w_r(t)$ (39) visszaírásával az első Friedmann-egyenletbe (35)

Friedmann-egyenlet

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\left[\rho_0 c^2\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + w_{r0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^4\right] + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2} \tag{40}$$

Feladat: megoldani $a(t)$-re!

- **Megyjegyzés:** (38) egyenlet átírása

$$a\frac{d}{dt}\left(a^3\rho c^2\right) + \frac{d}{dt}\left(a^4 w_r\right) = a\frac{d}{dt}\left(a^3\rho c^2\right) + a\frac{d}{dt}\left(a^3 w_r\right) + \dot{a}\left(a^3 w_r\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\rho c^2 + w_r\right)a^3\right] = -\dot{a}a^2 w_r$$

Energia nem állandó, a sugárzás munkát végez a téridőn!

Áttekintés

1 Emlékeztető

2 3D metrikák

3 A standard modell

4 Friedmann-egyenletek

5 Friedmann-egyenlet megoldása

6 Friedmann-univerzum

Friedmann-egyenlet megoldása

Ω_m, Ω_r, Ω_Λ dimenziótlan változók

$$\rho_0 := \Omega_m \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \qquad w_{r0} := \Omega_r \frac{3H_0^2 c^2}{8\pi G}, \qquad \Lambda := \Omega_\Lambda \frac{3H_0^2}{c^2} \tag{41}$$

Ezekkel a Friedmann-egyenlet (40)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_m \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \Omega_r \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_\Lambda\right] - \frac{kc^2}{a^2}$$

Az egyenletből k meghatározódik. Az egyenlet $t = t_0$ időben ($H_0 = \dot{a}_0/a_0$):

$$H_0^2 = H_0^2 \left[\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda\right] - \frac{kc^2}{a_0^2}$$

$$\Omega := \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda$$

Friedmann-egyenlet megoldása

$$k = \frac{a_0^2 H_0^2}{c^2}\,[\Omega - 1]$$

$\Omega \Rightarrow$ a tér geometriája

$$k = \begin{cases} +1 \Rightarrow \text{3D gömb,} & \text{ha } \Omega > 1 \\ -1 \Rightarrow \text{3D pszeudogömb,} & \text{ha } \Omega < 1 \\ 0 \Rightarrow \text{3D euklideszi tér,} & \text{ha } \Omega = 1 \end{cases}$$

$\Omega \neq 1$ esetén a_0:

$$a_0 = \frac{c}{H_0\sqrt{|\Omega - 1|}}$$

$\Omega = 1$ esetben pedig a_0 nem határozódik meg.

Friedmann-egyenlet megoldása

Visszaírva k Ω-val kifejezett alakját a Friedmann-egyenletbe

$$\frac{1}{H_0^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \Omega_m\left[\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 - \left(\frac{a_0}{a}\right)^2\right] + \Omega_r\left[\left(\frac{a_0}{a}\right)^4 - \left(\frac{a_0}{a}\right)^2\right] + \Omega_\Lambda\left[1 - \left(\frac{a_0}{a}\right)^2\right] + \left(\frac{a_0}{a}\right)^2$$

Új dimenziótlan változók

$$x := H_0 t, \qquad y := \frac{a_0}{a}$$

$$\dot{y} = -\frac{a_0\dot{a}}{a^2} = -\frac{\dot{a}}{a}y, \qquad \frac{\dot{a}}{a} = -\frac{\dot{y}}{y} = -H_0\frac{y'}{y}$$

Manapság $w_r(t_0) = w_{r0}$ minimális, $\Omega_r \approx 0$. Az elektromágneses sugárzás főleg az Univerzum korai szakaszában dominált.

$$\left(\frac{y'}{y}\right)^2 = \Omega_m\left[y^3 - y^2\right] + \Omega_\Lambda\left[1 - y^2\right] + y^2$$

Friedmann-egyenlet megoldása

$$\left(y'\right)^2 = y^2\left[\Omega_m y^3 + \left(1-\Omega_\Lambda-\Omega_m\right)y^2 + \Omega_\Lambda\right] \tag{42}$$

1 dimenziós potenciálprobléma! $(x \sim t,\ y(x) \sim r(t))$

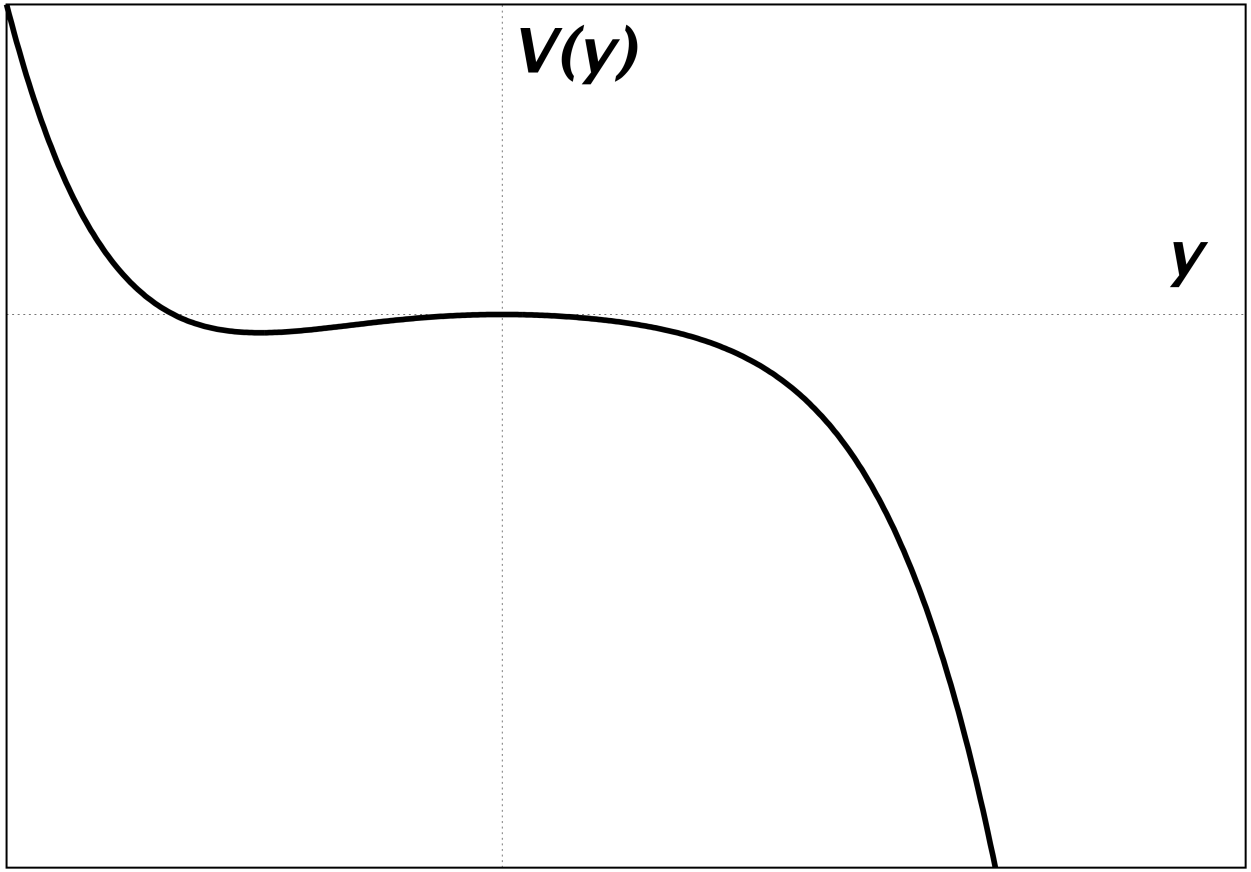
$$V(y) := -y^2\left[\Omega_m y^3 + \left(1-\Omega_\Lambda-\Omega_m\right)y^2 + \Omega_\Lambda\right]$$

$$x(\infty) - x(y) = \pm\int_y^\infty \frac{d\tilde{y}}{\sqrt{-V(\tilde{y})}}$$

- Definíció szerint $y = a_0/a \Rightarrow y$ nemnegatív.
- $y = 0$ nem integrálható szingularitás.
- Az egyyszerűség kedvéért: $\forall y > 0$ esetén $V(y) < 0 \Rightarrow \varnothing$ zérushely.
- $x(\infty) := 0$.

$$x = \int_y^\infty \frac{d\tilde{y}}{\sqrt{-V(\tilde{y})}}$$

Friedmann-egyenlet megoldása



Friedmann-egyenlet megoldása

- $y \longrightarrow \infty \;\Rightarrow x \longrightarrow 0 \Rightarrow t \longrightarrow 0$
  $V(y)$ csak legnagyobb rendben.

$$x = \frac{1}{\sqrt{\Omega_m}} \int_y^\infty \frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}^{5/2}} = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_m} y^{3/2}}$$

$$H_0 t = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_m}} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad a(t) \sim t^{2/3}$$

  Nagy Robbanás!
  Nagyon kis időkre w_r elhagyása miatt érvénytelen!

- $y \longrightarrow 0 \;\Rightarrow x \longrightarrow \infty \Rightarrow t \longrightarrow \infty$
  Elég kicsi $y < \eta$ esetén $V(y)$ csak legkisebb rendben.

$$x = \int_y^\infty \frac{d\tilde{y}}{\sqrt{-V(\tilde{y})}} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \int_y^\eta \frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}} + \int_\eta^\infty \frac{d\tilde{y}}{\sqrt{-V(\tilde{y})}} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} [\ln y + A]$$

$$H_0 t = \frac{1}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \left[\ln\left(\frac{a}{a_0}\right) + A\right] \quad \Rightarrow \quad a(t) \sim e^{\sqrt{\Omega_\Lambda} H_0 t}$$

  Kozmológiai állandó „feszíti szét” az Univerzumot.

Friedmann-egyenlet megoldása

Mérés: $\Omega_m = 0{,}3 \qquad \Omega_\Lambda = 0{,}7 \qquad \Omega_r \approx 0$

- Nagy Robbanás óta eltelt idő:

$$t_0 = \frac{1}{H_0}\int_1^\infty \frac{d\tilde{y}}{\sqrt{-V(\tilde{y})}} \approx 13{,}7\,\text{milliárd év}$$

- Gyorsuló tágulás
  A második Friedmann-egyenlet (37)

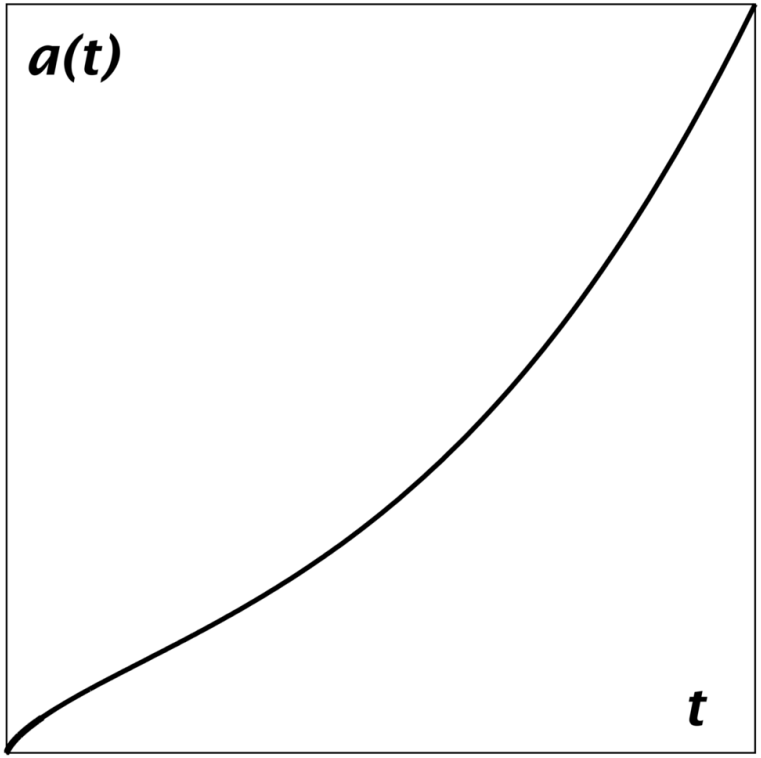
$$\ddot{a}_0 = a_0 H_0^2\left(\Omega_\Lambda - \frac{\Omega_m}{2}\right) = 0{,}55\, a_0 H_0^2 > 0$$

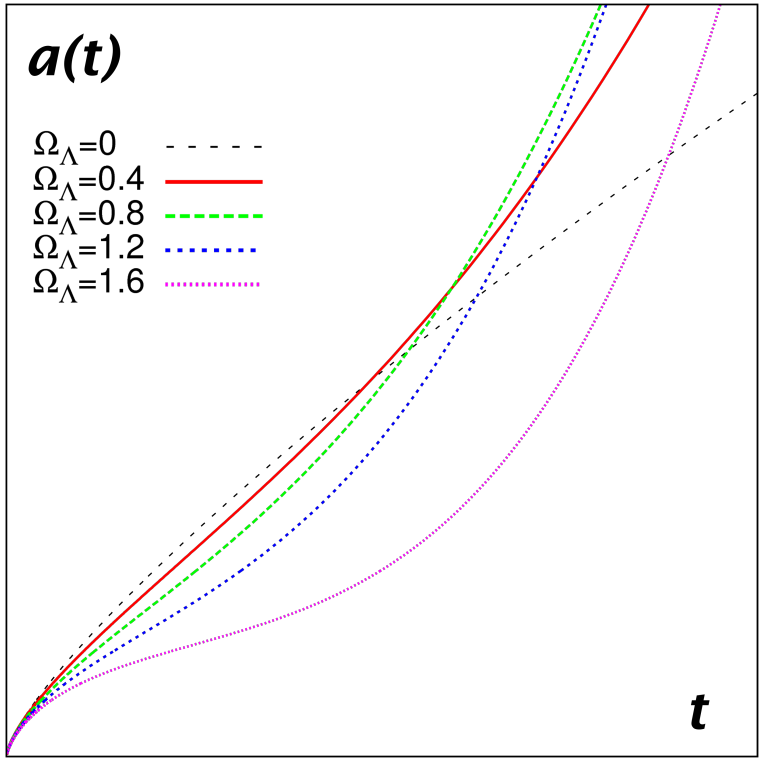
- Euklideszi térgeometria

$$\Omega = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 0 \quad \text{Véletlen?}$$

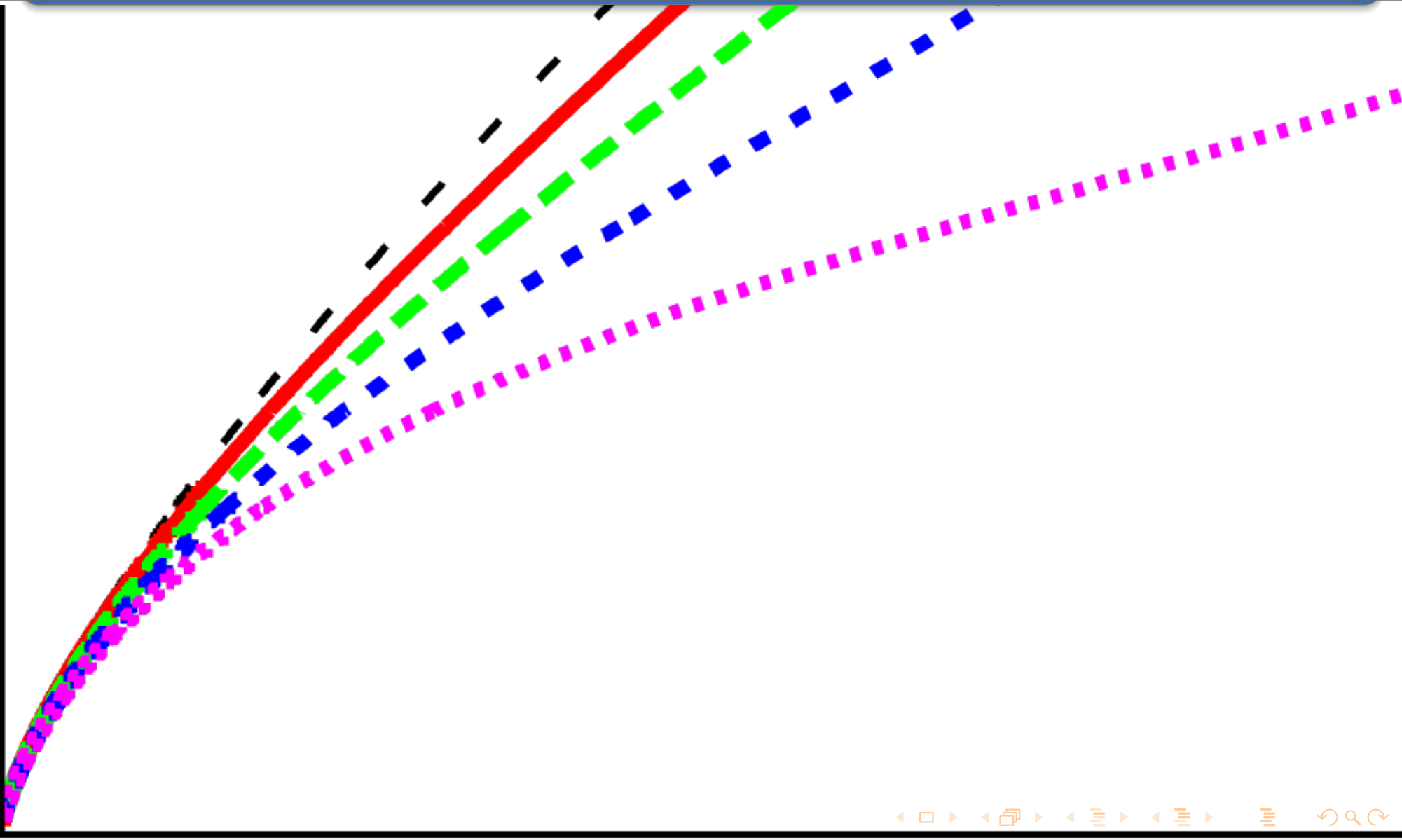
Megjegyzés: a *téridő* továbbra is görbült!

Friedmann-egyenlet megoldása





Friedmann-egyenlet megoldása



Áttekintés

1 Emlékeztető

2 3D metrikák

3 A standard modell

4 Friedmann-egyenletek

5 Friedmann-egyenlet megoldása

6 Friedmann-univerzum

Friedmann-univerzum

Friedmann-univerzum: $\Omega_r = \Omega_\Lambda = 0$

$$\Omega = \Omega_m = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_0 := \frac{\rho_0}{\rho_{kr}}$$

$$\text{Az Univerzum} \begin{cases} \text{3D gömb,} & \text{ha } \Omega > 1 \Rightarrow \rho_0 > \rho_{kr} \\ \text{3D pszeudogömb,} & \text{ha } \Omega < 1 \Rightarrow \rho_0 > \rho_{kr} \\ \text{3D euklideszi tér,} & \text{ha } \Omega = 1 \Rightarrow \rho_0 = \rho_{kr} \end{cases}$$

A (42) Friedmann-egyenlet az x, y dimenziótlan változókkal

$$\left(y'\right)^2 = y^2\left(\Omega_m y^3 + (1-\Omega_m)\, y^2\right) = y^4\left(\Omega_m y + 1 - \Omega_m\right)$$

$$x = \int \frac{dy}{y^2\sqrt{\Omega_m y + 1 - \Omega_m}}$$

Friedmann-univerzum

- $0 < \Omega_m < 1 \qquad \forall y > 0 \quad V(y) \neq 0$
  - $t \longrightarrow 0$ Előzővel azonos: $a(t) \sim t^{2/3}$
  - $t \longrightarrow \infty$ A legkisebb rend változott Ω_Λ elhagyása miatt.

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-\Omega_m}}\left[\int_y^\eta \frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}^2} + \int_\eta^\infty \frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{1-\Omega_m}}\left[\frac{1}{y} + A\right]$$

$$H_0 t = \frac{1}{\sqrt{1-\Omega_m}}\left[\frac{a_0}{a} + A\right] \quad \Rightarrow \quad a(t) \sim t$$

- $\Omega_m = 1$

$$x = \int_y^\infty \frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}^{5/2}} = \frac{2}{3y^{3/2}}$$

$$a(t) = a_0\left(\frac{2H_0 t}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Minden időre $a(t) \sim t^{2/3}$-os tágulás.

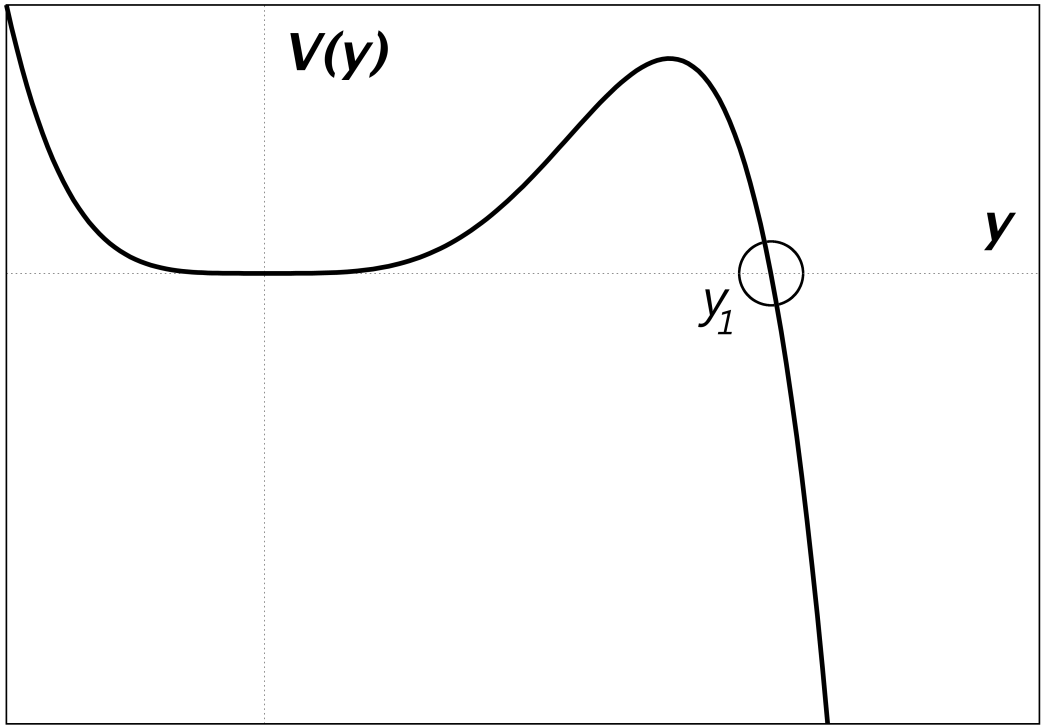
Friedmann-univerzum

- $\Omega_m > 1$

$$\exists y_1 > 0 \quad V(y_1) = 0$$

$$y_1 = \frac{\Omega_m - 1}{\Omega_m} > 0$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{\Omega_m}} \int_{y_1}^{\infty} \frac{dy}{y^2 \sqrt{y - y_1}}$$



Friedmann-univerzum

$u = y/y_1$ helyettesítéssel:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{\Omega_m}} \int_1^\infty \frac{y_1\, du}{y_1^2 u^2 \sqrt{y_1 u - y_1}} = \frac{1}{y_1^{3/2}\sqrt{\Omega_m}} \int_1^\infty \frac{du}{u^2\sqrt{u-1}} = \frac{\pi}{2y_1^{3/2}\sqrt{\Omega_m}}$$

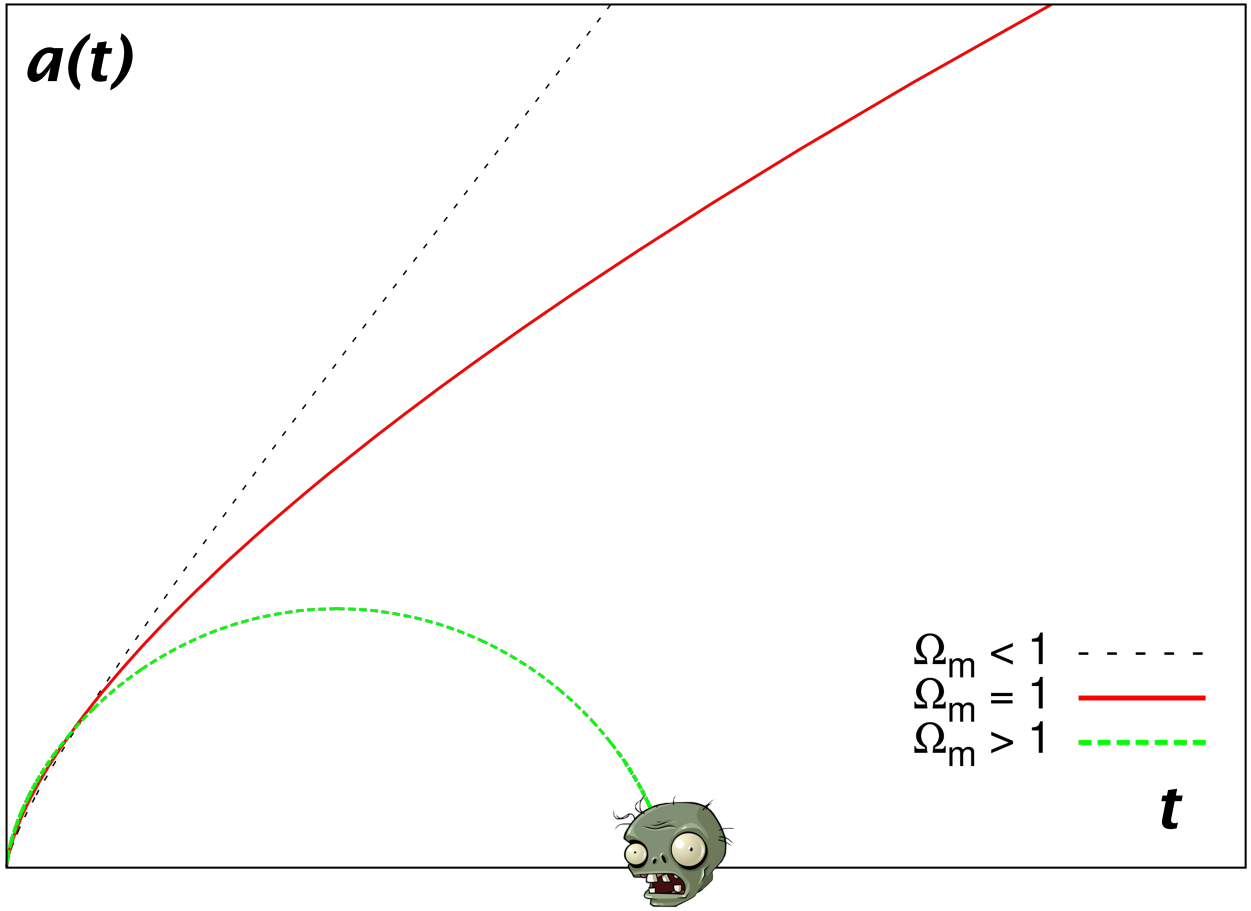
$$x = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\Omega_m}} \displaystyle\int_y^\infty \frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}^2\sqrt{\tilde{y}-y_1}}, & \text{ha } 0 \le x \le x_1 \\[2ex] x_1 + \dfrac{1}{\sqrt{\Omega_m}} \displaystyle\int_{y_1}^y \frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}^2\sqrt{\tilde{y}-y_1}}, & \text{ha } x_1 < x \end{cases}$$

Kezdet: Nagy Robbanás, $a(t) \sim t^{2/3}$

Vég: *Nagy Összeroppanás* T idővel később

$$T = \frac{2x_1}{H_0} = \frac{\pi/\left(2y_1^{3/2}\sqrt{\Omega_m}\right)}{H_0} = \frac{\pi}{2H_0\left(\Omega_m^3 - \Omega_m^2\right)^{3/2}}$$

Friedmann-univerzum



Friedmann-univerzum

Friedmann-univerzum

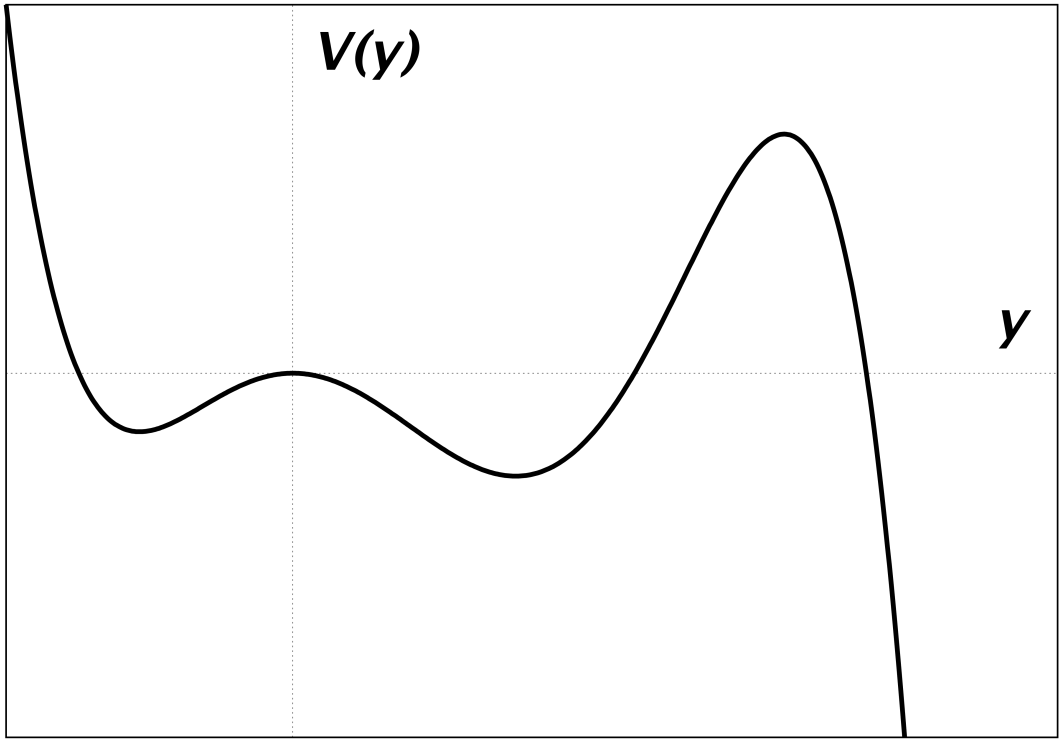
tömegsűrűség $\Longleftrightarrow$ térgeometria $\Longleftrightarrow$ terminális viselkedés

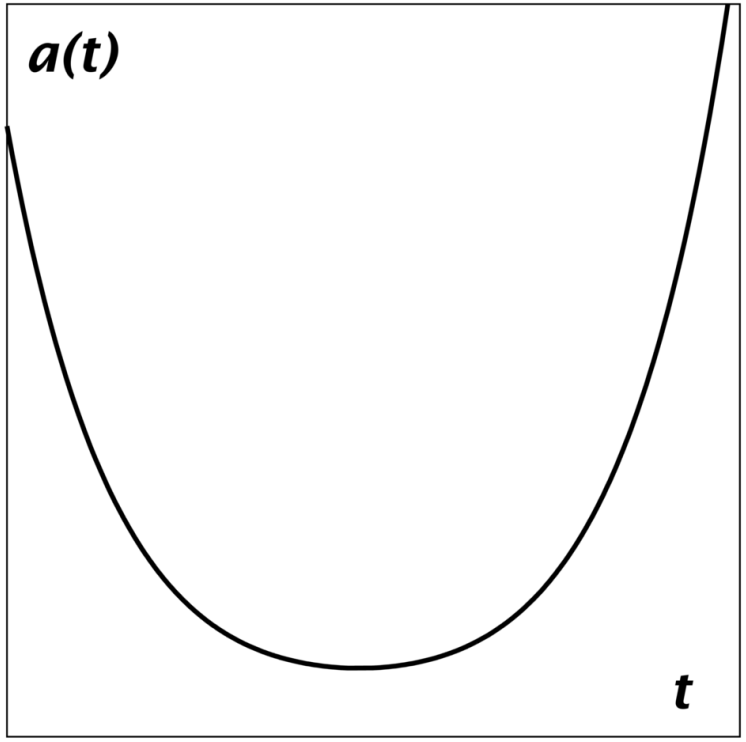
- $\rho_0 > \rho_{kr} \Longleftrightarrow$ 3D gömb $\Longleftrightarrow$ Nagy Összeroppanás
- $\rho_0 < \rho_{kr} \Longleftrightarrow$ 3D pszeudogömb $\Longleftrightarrow$ Folyamatos tágulás $\sim t$
- $\rho_0 = \rho_{kr} \Longleftrightarrow$ 3D euklideszi tér $\Longleftrightarrow$ Folyamatos tágulás $\sim t^{2/3}$

Ha $\Omega_\Lambda \neq 0$ és/vagy $\Omega_r \neq 0$: geometria $\not\Rightarrow$ terminális viselkedés

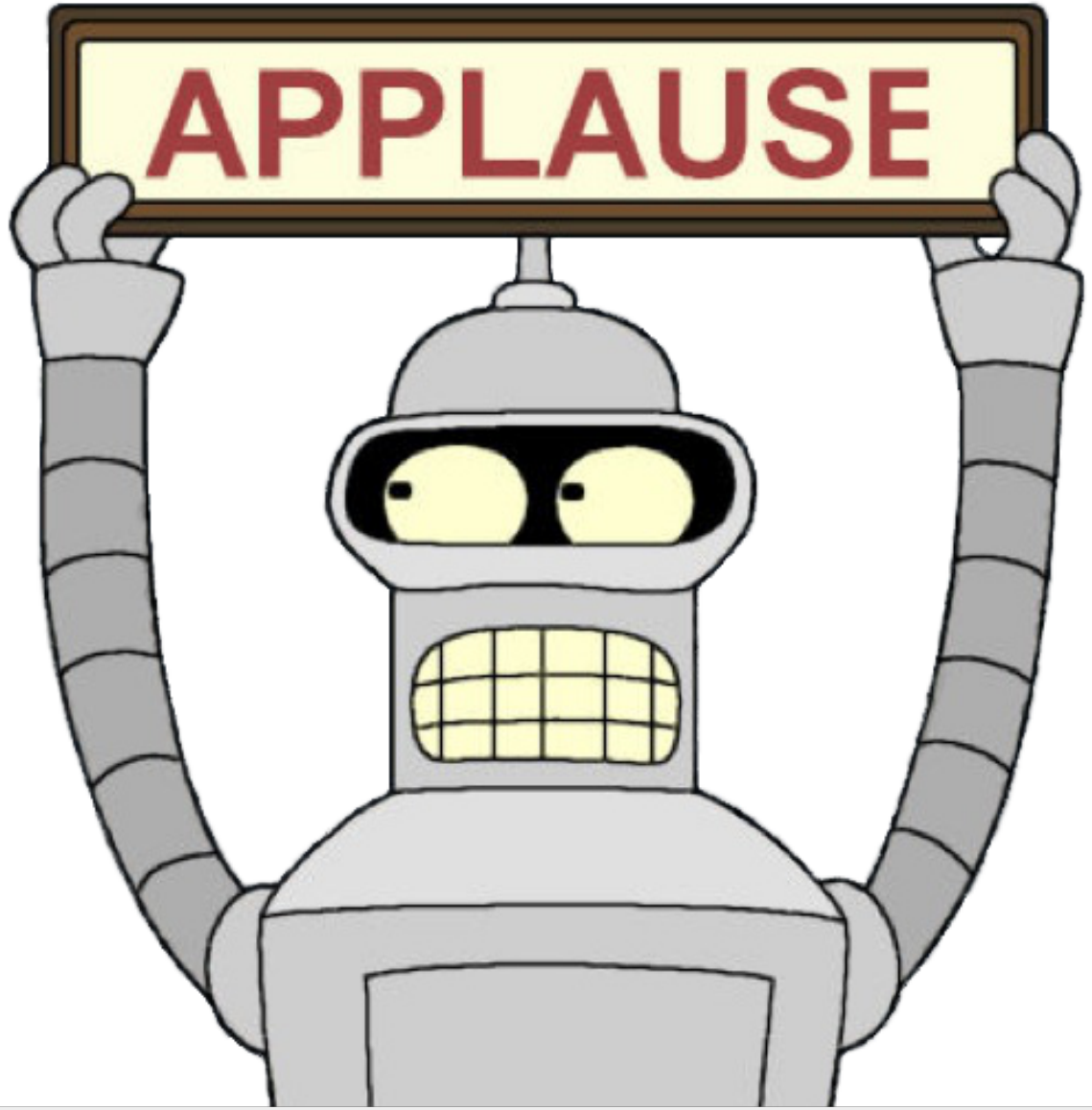
Érdekes eset

$\Omega_m = 0{,}3 \quad \Omega_r = 0 \quad \Omega_\Lambda = 1{,}8$





Források

Hraskó Péter: Általános relativitáselmélet és kozmológia
A Budapesti Műszaki Egyetemen tartott előadások jegyzete
http://www.hrasko.com/peter/

Köszönjük a figyelmet!