# 1. Hopfield hálózat kapacitásának kimérése

A Hopfield modell neuronhálózatokat modellez a következő módon: a neuronok egy (általános esetben) telejsen összefüggő hálózatot alkotnak. Minden neuron két értéket vehet fel: -1 és 1. (Vagy 0 és 1, ahogy az Hopfield eredeti cikkében is volt. Én azért választottam a -1 és 1-et, mert a léptetésnél így egy egyszerű signum függvényt kell majd használni.) Ezeket egy speciális súlymátrix kapcsolja össze, ami alapján a rendszert időben fejleszteni lehet. A rendszer különlegessége, hogy az időfejlődés során fixpontokba konvergál, amik előre megadott vektorok, vagyis a rendszer képes az emlékezésre, és a memorizált tartalom előhívására. A neuronok számát $N$, a megjegyzendő vektorok számát $n$ jelöli. A rendszer aktuális állapota $V$ ( $V_i = \pm 1$ ), a memorizált állapotok pedig $V^S$, ahol $S = 1, \ldots, n$ .

A kölcsönhatási mátrix a következőképpen áll elő:

$$T_{ij} = \begin{cases} \sum_S V_i^S V_j^S & \text{, ha } i \neq j \\ 0 & \text{, ha } i = j \end{cases} ,$$

vagyis a mátrix a memóriavektorok önmagukkal vett diadikus szorzatainak összege, a főátlóban pedig 0-k vannak, hogy a neuronok ne hassanak vissza saját magukra, mert ez oszcillációkat okozhatna. Az $i$-edik neuront a következő szabály szerint kell léptetni:

$$V_i^{t+1} = \text{sign}\left( \sum_j T_{ij} V_j^t \right) ,$$

ahol a sign a signum függvényt jelenti, ami negatív argumentumra -1, pozitívra +1 értéket vesz fel.

Be lehet vezetni a rendszer energiáját, ami az időfejlődés során csökken, a fixpontokban pedig lokális minimum értéket vesz fel.

$$E = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_{i \neq j} V_i T_{ij} V_j$$

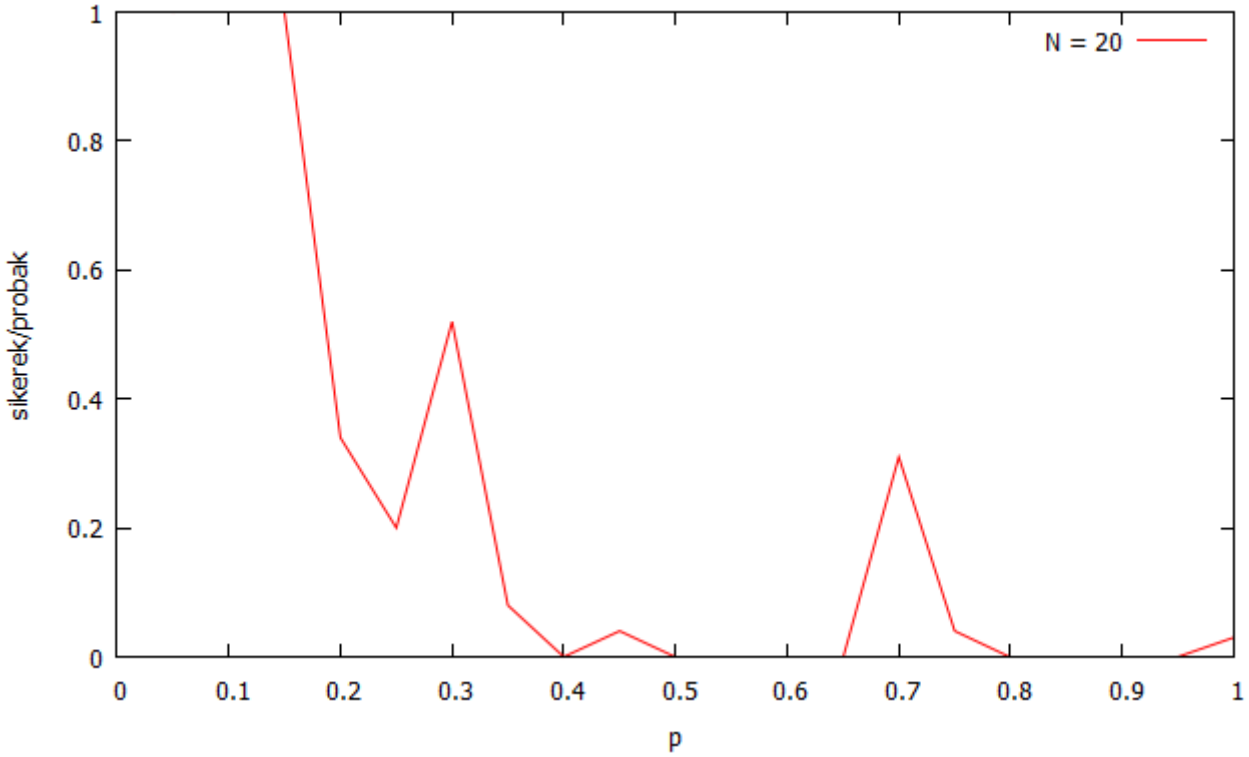
Ez azért hasznos mennyiség, mert segítségével lehet vizsgálni a rendszer konvergenciáját.

A várakozások szerint a rendszer nem képes megjegyezni $n \approx 0{,}14 \cdot N$ -nél több állapotot. Feladatunk ennek a $p = \frac{n_{\text{krit}}}{N} \approx 0{,}14$ kapacitásnak a numerikus úton történő igazolása.

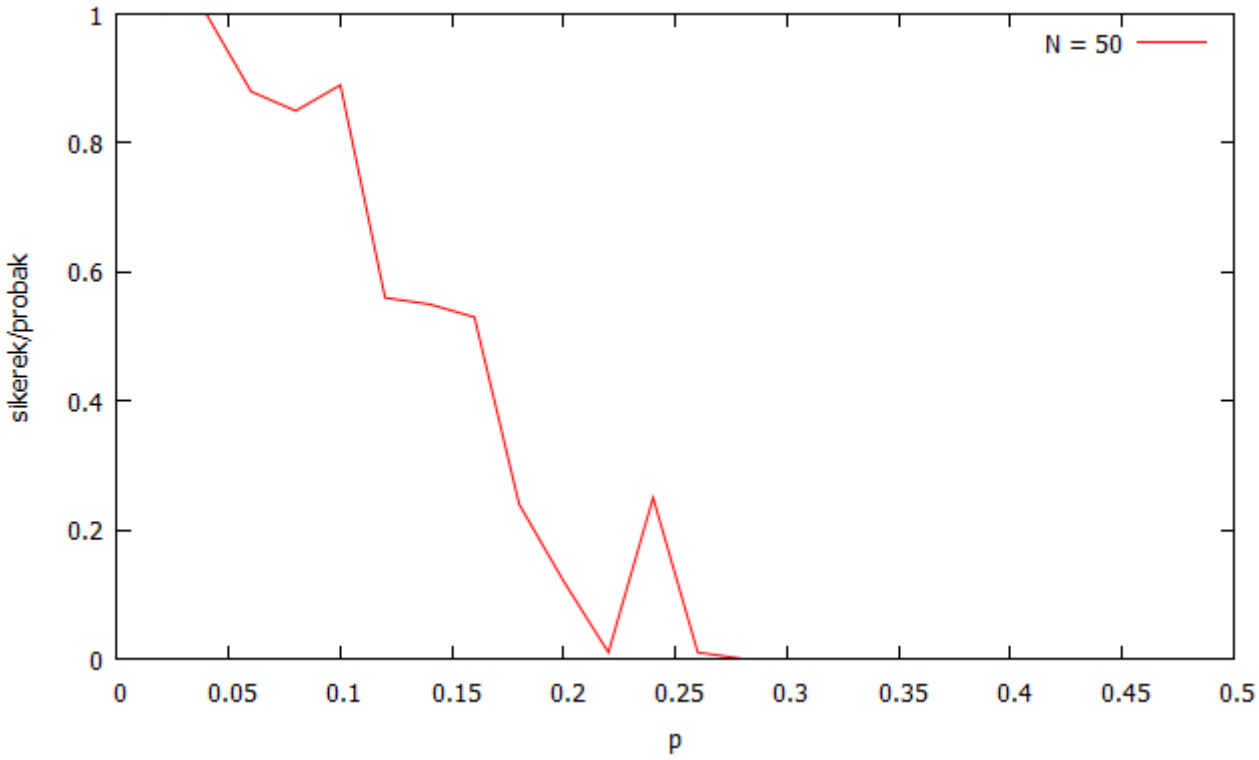
A rendszer leszimulálására MatLab programot írtam, ami véletlenszerűen generált $V^S$ vektorokat, és a fenti szabály szerint legenerálta belőlük a $T$ mátrixot, majd véletlen aszinkron léptetéssel fejlesztette a rendszert. Minden $5N$ lépés után kiszáolta a rendszer energiáját, és ha az a legutóbbihoz képest nem változott, a fejlesztés leállt. (Azért kellett $5N$ lépésenként vizsgálni, mert néhány elem hamarabb konvergált, mint a többi, és ha a véletlen dinamika ezeket választotta ki léptetésre, akkor az állapot nem változott, de mégsem volt fixpont. $5N$ lépésben már szinte biztosan léptettünk minden pontot, s ha így sem változott az állapot, azt már fixpontnak tekintettem.)

Adott $N$-re $n$ több értéken futott végig, és a program mindig új $V^S$ vektorokat generált. Minden $n$-re 100 véletlen kezdőértéket vizsgáltam meg, ahol a kiinduló vektor komponensei egy -1 és 1 közötti véletlen értéket vettek fel. A próbálkozások során leszámoltam, hogy a végállapot hányszor egyezik meg valamelyik memóriavektorral, így $n$ (és $p$) függvényében megkaptam a sikeres konvergálások arányát. Ezt elvégeztem $N$ = 100, 200, 500 értékekre, és mivel 500-nál már nagyon lassan futott le a program, 50-re és 20-ra is kipróbáltam. Kisebb értékeknél $n$ = 1, ..., $N$ tartományban, nagyobbakra csak a kritikus érték körüli intervallumra.

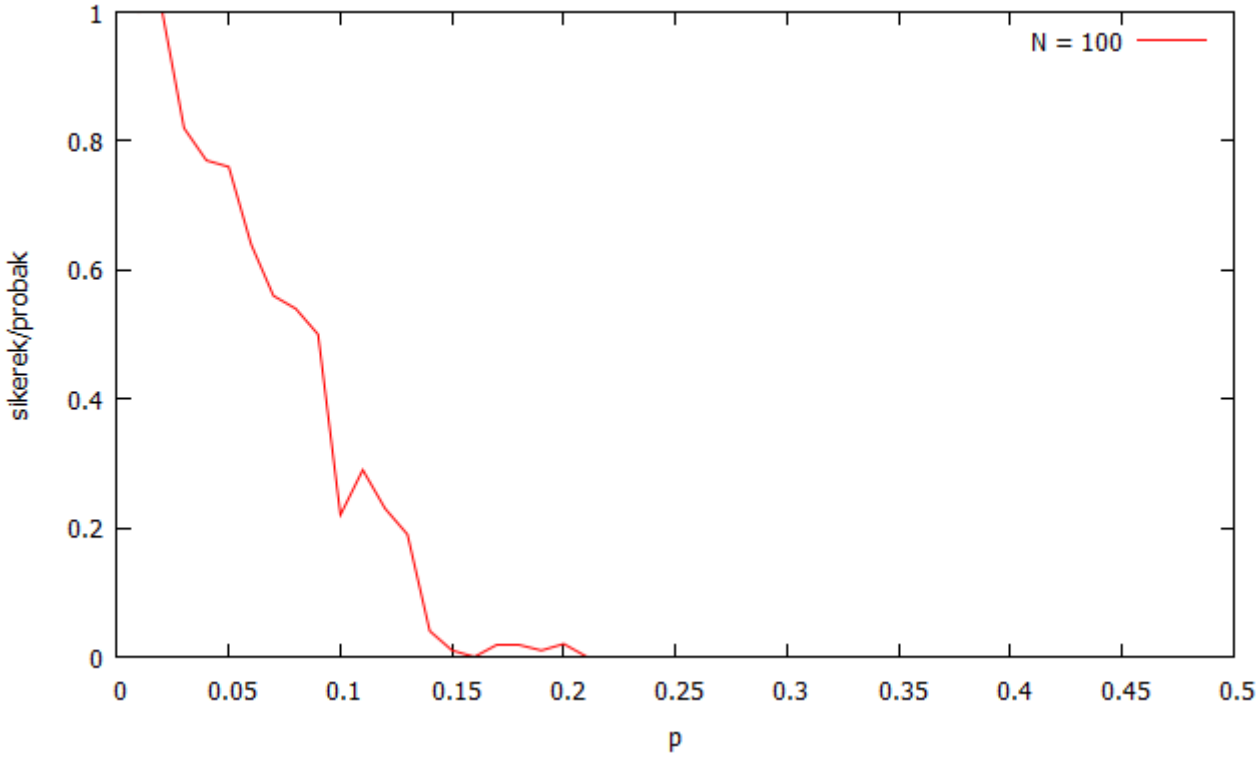
A kapott eredmények az *1. - 5. ábrákon* láthatók.



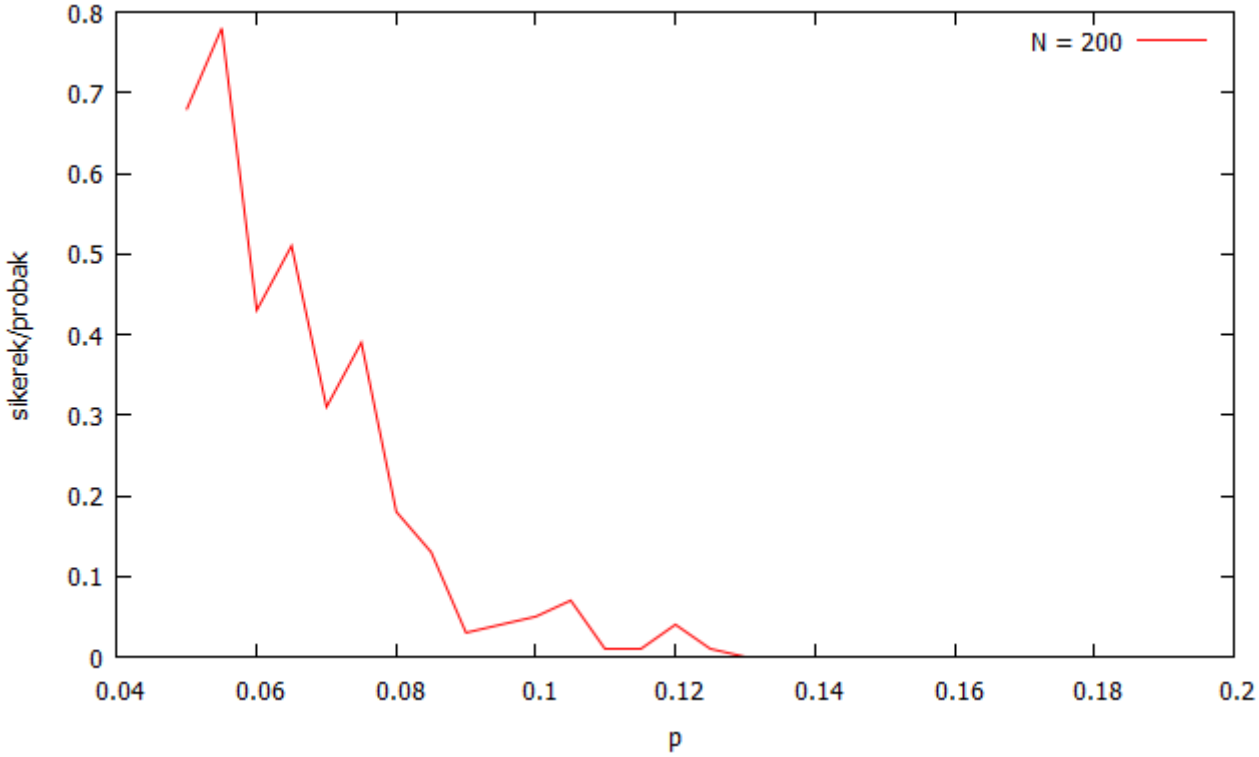

*1. ábra. Sikeres konvergálások aránya Hopfield hálózatban N = 20-ra. A láthatóság kedvéért a pontokat összekötöttem, de p csak diszkrét értékeket vehet fel, az összekötésnek nincsen valós jelentése! Látszik, hogy kis értékekre minden esetben konvergál, aztán hirtelen legvág a függvény, és a fluktuációktól eltekintve alig kapunk értelmes végeredményt.*



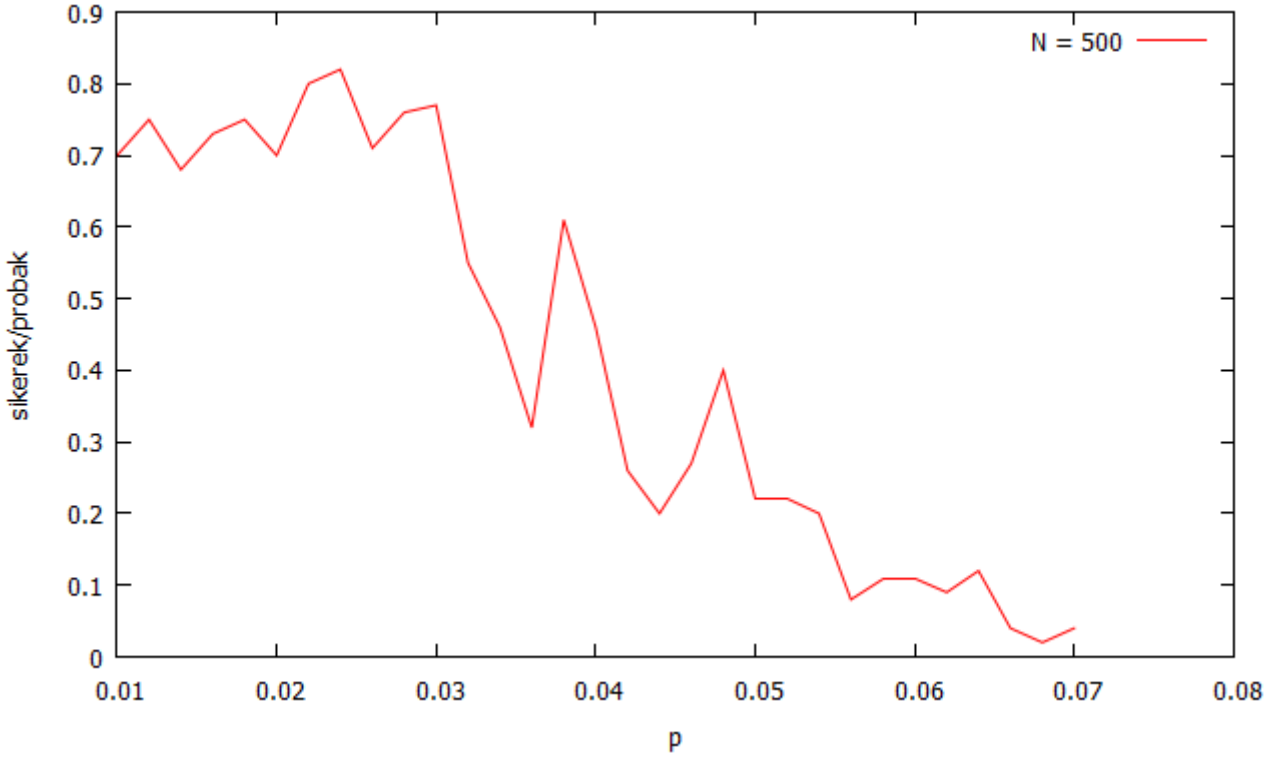

*2. ábra. Sikeres konvergálások aránya Hopfield hálózatban N = 50-re. Az összekötéseknek itt sincs fizikai jelentésük.*




*3. ábra. Sikeres konvergálások aránya Hopfield hálózatban N = 100-ra. Az összekötéseknek itt sincs fizikai jelentésük.*




*4. ábra. Sikeres konvergálások aránya Hopfield hálózatban N = 200-ra. Az összekötéseknek itt sincs fizikai jelentésük.*




*5. ábra. Sikeres konvergálások aránya Hopfield hálózatban N = 500-ra. Az összekötéseknek itt sincs fizikai jelentésük.*

Az eredményeket összefoglalva látszik, hogy a várakozások szerint kis számú memóriavektor esetén nagy arányban vannak a sikeres konvergenciák, ám 100 fölött már nem mindig pontos az előhívás. A fluktuációktól eltekintve a függvényeknek van egy hirtelen levágása, ami után gyakorlatilag 0 esetben kapjuk vissza a kívánt állapotot, ám ránézésre is látszik, hogy ez $N$ növelésével egyre kisebb $p$ értékeknél következik be. Ha például azt vesszük kritikus értéknek, ahol a sikers konvergálások aránya nagyjából 0,5, akkor a 100 alatti értékekre nagyjából visszakapjuk az elméleti $p \approx 0{,}15$ -ös értéket, ám $N = 100$-nál már 1 alatt van, 500-nál pedig 0,03 és 0,04 között. Az esetemben kis $N$-ekre mind a kapacitás kimérése, mind a siekres koncergenciák sikeresebbnek bizonyultak, pedig elméletileg nagy számú neuron szimulálásánál vártam jobb eredményt.