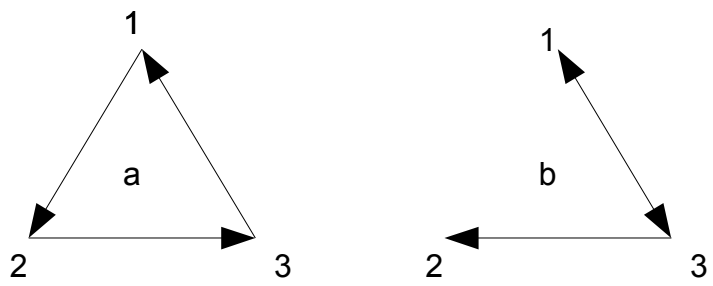
1. Logikai hálózatok

Mivel $K = 1$, ezért egyváltozós logikai függvényeket kell használnunk, amiből négy van: az identitás (I), a negálás (N), az, ami mindenhez 0-t, és ami mindenhez 1-et rendel. Egyelőre én az I és N eseteket vizsgáltam. Így az eseteket, a pontok indexelésének sorrentjében jelölhetjük egy N hosszú betűsorral: pl INI, ha az 1. és 3. pontot indentitás, a 2.-at negálás függvény határozza meg. Minden ponthoz hozzárendelhetünk egyet ezek közül, így általánosan 2^N-féle léptetési szabály létezhet egy gráfhoz, ami az adott esetekben általában kevesebb esetre egyszerűsödik.

A gráfokállapotát egy N komponensű vektorral jellemezhetjük, amik minden komponensét az előző állapot egy komponense határozza meg identitás, vagy negálás szerint. Ezt MatLab-ban valósítottam meg, a szimultán léptetést egy ideiglenes vektorral.

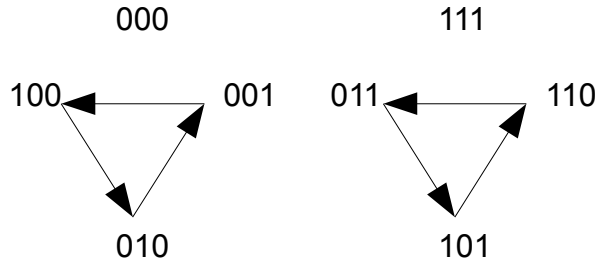
1.1. $N = 3$, $K = 1$ hálózatok

Ebből a gráfból kétfélét lehet létrehozni. Ezt a kettőt az *1. ábrán* láthatjuk. Az ábrán megjelöltek szerint ezeket *a* és *b* gráfoknak fogom nevezni. Minden továbbit megkaphatunk a pontok átindexelésével.

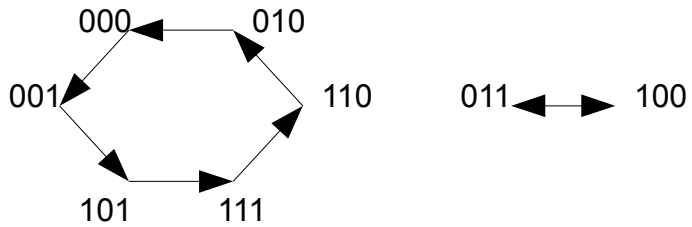


1. ábra. N = 3, K = 1 N-K hálózatok esetei a logikai függvények megadása nélkül. Ez az öszes eset, a többi megkapható az indexek átrendezésével.

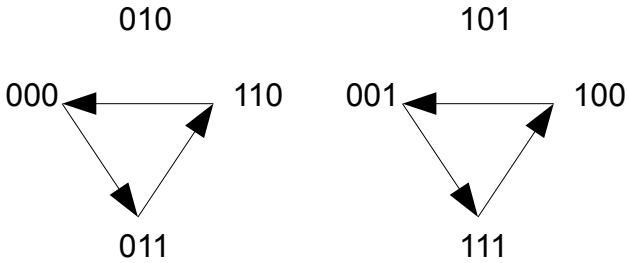
Az *a* esetben, mivel ciklikusan permutálva ugyanazt az esetet kapjuk, csak az számít, hány I és hány N van, azaz 4 eset létezik. Ezek állapotterei:



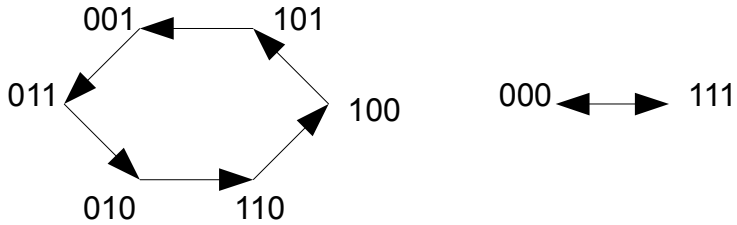
a01 eset: III



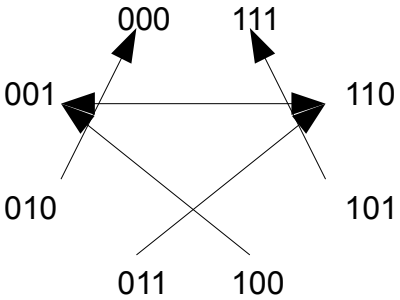
a02 eset: IIN:



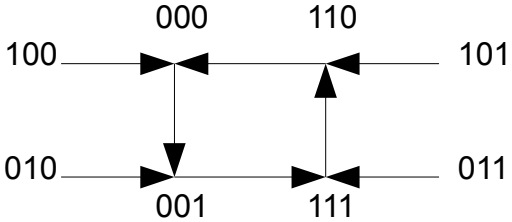
a03 eset: INN



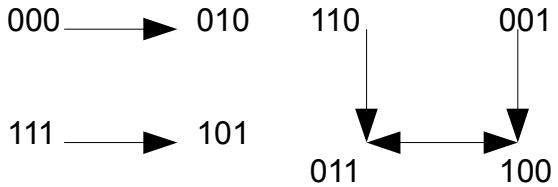
a04 eset: NNN



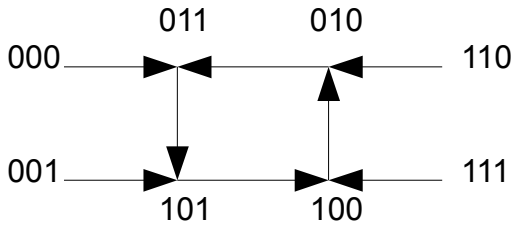
b01 eset: III



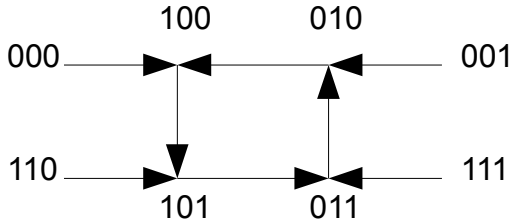
b02 eset: IIN



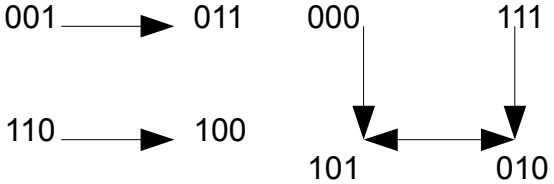
b02 eset: INI



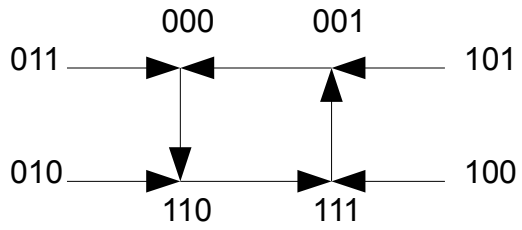
b04 eset: INN



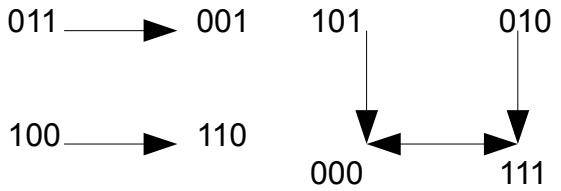
b05 eset: NII



b06 eset: NIN



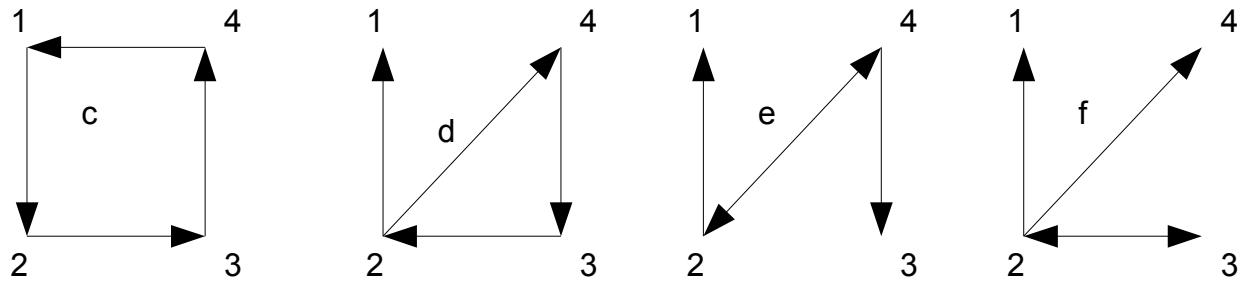
b07 eset: NNI



b08 eset: NNN

1.2. *N* = 4, *K* = 1 hálózatok

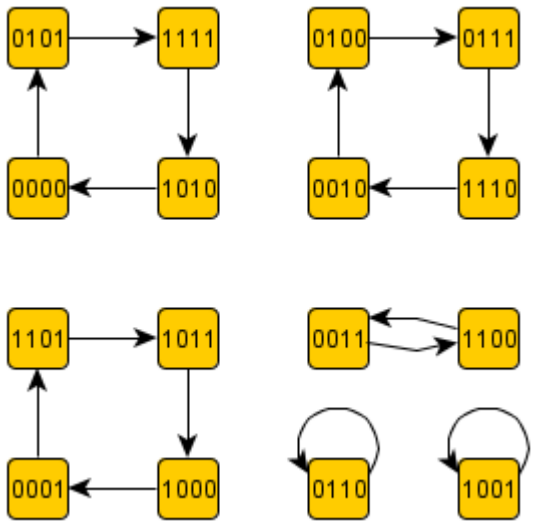
Hasonlóak az *N* = 3-as hálózatokhoz, csak többféle eset van. Ezek a *2. ábrán* láthatóak.



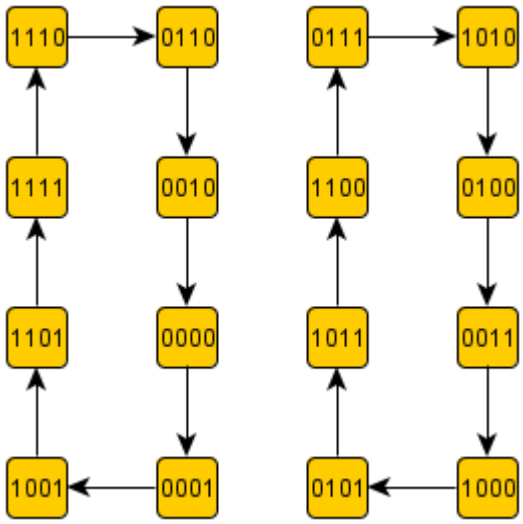
2. ábra. N = 4, K = 1 logikai hálózatok lehetséges elrendezései. Minden további elrendezés megvalósítható az indexek cserélgetésével.

Mivel mind a négy ponthoz mind a négy féle függvényt hozzárendelhetjük, nagyon sok esetünk lesz. A fenti, *N* = 3 esetből látszik az is, hogy a fázistérbeli viselkedés szempontjából sok eset izomorf egymással, így elég kevesebbel foglalkozni. A teljesség igénye nélkül közlök néhány, általam érdekesebbnek talált esetet.

A *c* esetben a csupa 1 és csupa 0 hozzárendelés nyilván nem érdekes, a csupa igen egy több körből álló fázisteret hoz létre, ahol a 0-k és 1-ek körbe lépkednek, a csupa nem pedig egy ehhez hasonlót, csak minden lépésben negáljuk az eredményt. Néhány nemtriviális szabály:



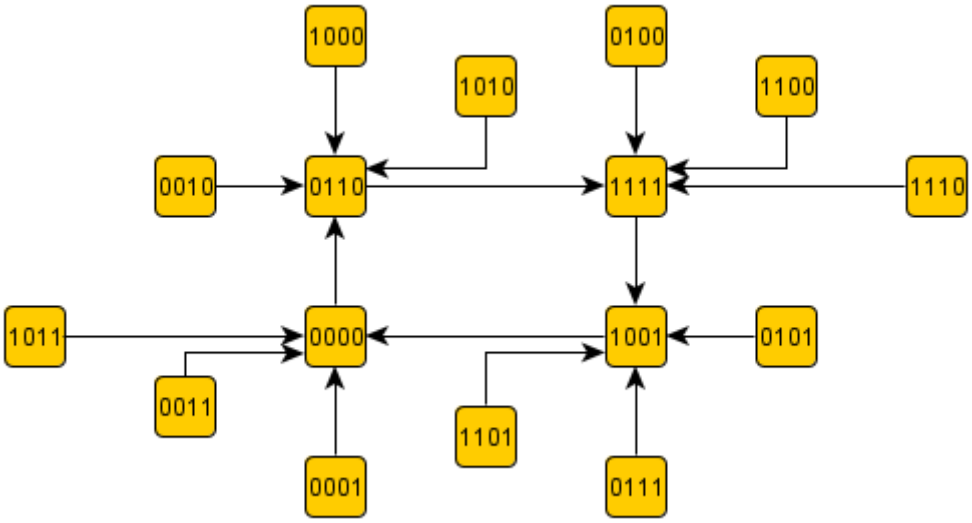
c eset, NINI szabály. A 0110 és az 1001 állapotok szinte triviálisan fixpontok lesznek, azonkívül a fázistér 4 ciklusra esik szét. Az elforgatottak természetesen ezzel ekvivalensek.



c eset, IIIN szabály. Nincsenek fixpontok. Bármilyen egy darab N és 3 I ezzel ekvivalens.

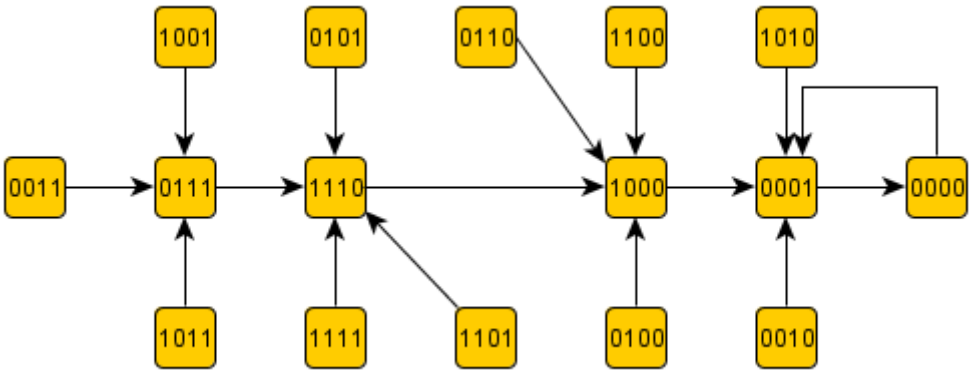
d eset. A 2-es, 3-as és 4-es pontok felcserélhetőek. Teljesen azonos az $N = 3$-as esettel, csak van plusz egy pontunk, ami nem hat vissza a rendszerre, de az befolyásolja őt. Emiatt nem is részletezném külön.

e eset. Ennek is van egy szimmetriája: 1 ↔ 3 és 2 ↔ 4 csere. Ha ez a léptetési szabályokban is megjelenik, a szimmetriát a fázistérbeli dinamikának is tükröznie kell. Vegyük például az INNI esetet:



e gráf, INNI szabály. A fázistér gráfján is látszik, hogy magasfokú szimetriát mutat. A rendszer bárhonnan indítva egy 4 elemű határciklusba jut, aminek elemei a fenti átindexelésre invariánsak.

Hogyha a szabály nem mutatja a fent említett szimmetriát, akkor a fázistér is kevésbé szimmetrikus. Nézzük az IIIN szabályt:



e gráf, IIIN szabály. A 0001, 0000 kételemű határciklus könnyen adódik, a többi állapot pedig egy völgyön keresztül, különböző számú lépésen keresztül konvergál bele.

Valójában ez az eset is elég egyszerű, hiszen csak a 2-es és 4-es pontok hatnak kölcsön egymással, az 1-es és 3-as pontok pedig nem hatnak vissza a rendszerre. Ehhez igen hasonló az utolsó, *f*-fel jelölt esetünk is, csak a két "kifutó" pont állapotát ezúttal egy pont határzza meg kettő helyett. Ezért ezt sem részletezném külön, a határciklusok és fixpontok tekintetében a viselkedése hasonlít az *e* esethez.

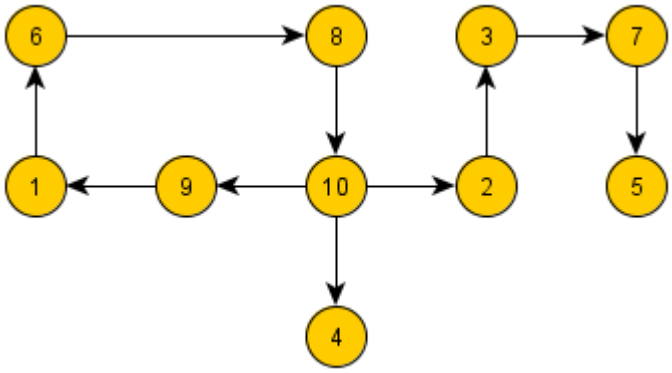
1.3. $N = 10$, $K = 1$ véletlen gráf viselkedése

MatLab segítségével generáltam 10 pontú, 1 konnektivitású gárfokat. Ezek közül egy véletlen realizációt fogok itt vizsgálni. A gráfot egy 10 elemű K vektorral jellemzem, ahol $K_i = j$ azt jelenti, hogy a j pontból az i-be mutat egy irányított él. Az általam vizsgált gráf K vektora:

```
K =

     9    10     2    10     7     1     3     6    10     8
```

Gráffal jelölve:



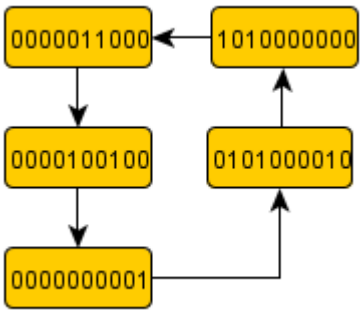
3. ábra. N = 10, K = 1 véletlen gráf.

Mivel a hálózatnak $2^{10} = 1024$ lehetséges állapota van, nem fogom lerajzolni az egész állapotteret. Programot írtam, amiben szinkron lépésekkel léptetem a rendszert. Mindig elmentem az előző 10 állapotot, és ha a legújabb állapot megegyezik valamelyikkel, akkor egy 10 elemnél nem hosszabb határciklusba jutottunk, és a program leáll. Különböző véletlen kiinduló állapotokból indítva vizsgálom így a vonzási tartományokat. Nem határoztam meg, hogy mennyi határciklus, vagy fixpont van, és a túl hosszúakkal sem foglalkoztam, ugyanis az állapottér mérete miatt sok vonzási tartomány és nagyon hosszú határciklusok is előfordulhatnak.

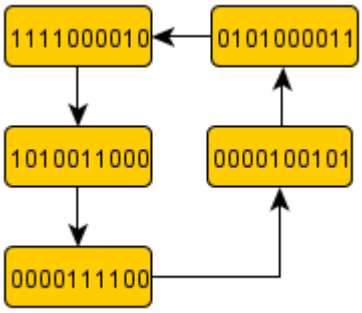
- *Tiszta identitás*

Van néhány triviális fixpont. Tiszta identitásnál a csupa 0, vagy a csupa 1 állapotok nyilván fixpontok (ez bármilyen $K = 1$ gráfnál is igaz). A gráfban van egy kör, és két kifutó ág. A körben bármilyen 5 szám ismétlődni fog 5 lépésben, a kifutó ágakon pedig a 10-es pont állapota fog kifelé lépkedni. Megfelelő mintázatnál ez is okozhat határciklusokat.

Több véletlenszerű kezdőfeltétellel indítva két határciklust határoztam meg:



N = 10, K = 1 véletlen logikai hálózat egy határciklusa tiszta identitás esetén

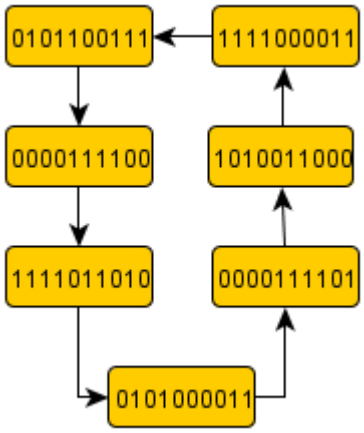


N = 10, K = 1 véletlen logikai hálózat egy másik határciklusa tiszta identitás esetén

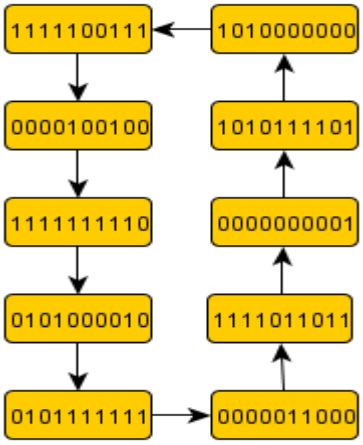
Valóban a 10 → 9 → 1 → 6 → 8 körön mennek végig a számok. A kifutó éleken is mennek kifelé a mintázatok. Egy ciklus pedig akkor lesz határciklus, hogyha a "frekvenciák" megegyeznek, vagy egymás egész számú többszörösei. Természetesen az összes pontra elvégezve a 0 ↔ 1 cserét szintén határciklust kapunk.

- *Tiszta negálás*

Tiszta negálás esetén az egyszerű mintázatok már nem feltétlenül határciklusok. A körön itt is mennek körbe a mintázatok, csak minden lépésben negálódnak. Mivel a kör hossza 5, ami páratlan, csak 10 lépésből jutunk biztosan ugyanoda, ennél kevesebb csak akkor elég, ha "szerencsénk" van. A fent bemutatott ciklusok ezen esetben is határciklusok lesznek, ha kétszer egymás után illesztjük őket (10 elem) és minden második lépés után az egészet negáljuk. Ezen kívül véletlen próbálgatással kaptam:



N = 10, K = 1 véletlen hálózat egy 7 elemű határciklusa tiszta negálásra.



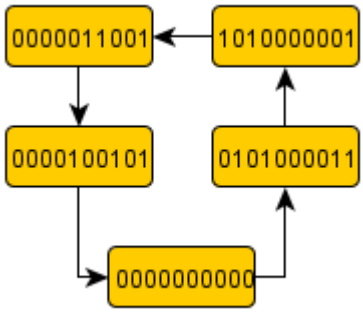
N = 10, K = 1 véletlen hálózat egy 10 elemű határciklusa tiszta negálásra. Bárhonnan indulva 5 lépés után a kiindulás negáltját kapjuk. Ez is olyan eset, ami megkapható a tiszta identitás egy 5 elemű határciklusából. (Konkrétan a fent elsőként lerajzoltból.)

Mind tiszta identitás, mind negálás esetén viszonylag sok véletlen kezdőfeltételből indulva ugyanezekbe a ciklusokba konvergált a rendszer. Ebből arra következtetek, hogy valószínűleg nincsen nagyon sok határciklus.

- *Néhány véletlen keverék*

Mivel felesleges lenne különböző fázistérbeli ábrák további halmozása, és a különböző véletlen keverékek kvílitatíve úgysem különböznek nagyon, csak egy véletlen keveréket fogok megvizsgálni. Mindegyik esetben speciális triviális (vagy nem annyira triviális) fixpontok és határciklusok előfordulhatnak, de ezekről általánosan nem lehet beszélni, hacsak azt nem tudjuk megjegyezni, hogy a rendszer általánosításával elvesznek a szimmetriák és szabályosságok, így az ezekből adódó ciklusok már nem valósulhatnak meg és valószínűleg a rendszernek kevesebb határciklusa lesz, mint tiszta identitás vagy negálás esetén.

A program az ININIIIINN esetet adta, így ezt vizsgálom meg. Erre sok véletlen kezdeti állapotra mindig ugyanazt kaptam:



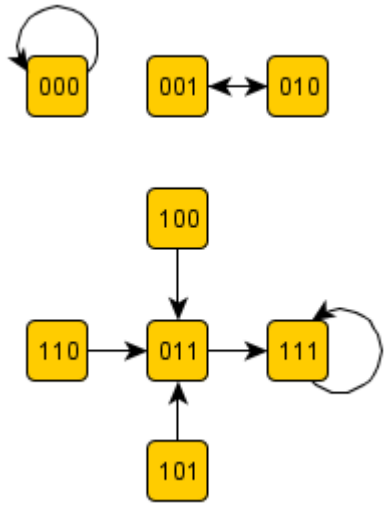
Véletlen logikai hálózat véletlen szabályra adott egy speciális határciklusa.

- *Nem véletlen keverék*

Csak kvalitatív megjegyzésként közölném, hogy speciálisan is megadható az identitások és negálások egy keveréke. Például a körben csupa Igen, a kifutó ágakra csupa Nem, vagy I és N keveréke is 10 (vagy 5) hosszúságú határciklusokat eredményezhet. Vagy a kör I-jei közé ügyesen betéve egy N-t manipulálhatjuk a körbefutó mintát. Speciális fázistérbeli viselkedést megkövetelve állíthatjuk be a szabályokat.

1.4. $N = 3$, $K = 2$ megadott automata vizsgálata szinkron és aszinkron esetben

A megadott hálózat egy 3 pontú, 2-es konnektivitású (azaz teljesen összefüggő) gráf, ahol az 1-es pontot ÉS, a másik 2 pontot VAGY függvénnyel állítjuk elő a fennmaradó kettőből. Már tudjuk, hoy szinkron dinamika esetén a rendszer így visekedik:



3 elemű, teljesen összefüggő ÉS, VAGY, VAGY szabállyal megadott logikai hálózat fázistérbeli viselkedése szinkron dinamika esetén.

Az aszinkron dinamikát úgy valósítottam meg, hogy mindhárom pontot megváltoztattam megadott sorrendben (3! = 6 eset), vagyis nem véletlenszerű léptetéssel. Így könnyebb vizsgálni a fázistérbeli viselkedést. Feleslegesnek tartom közölni mind a hat ábrát, inkább összefoglalom a lényeges vonásokat.

Mind a hat esetben érthető módon fixpont maradt a 000 és 111 állapot, és más fixpontok nem jelentek meg. A különbség csak abból fakadt, hogy melyik állapot melyik fixpontba konvergál és hány lépésen keresztül (mindig 1, vagy 2). A szinkron esettel ellenntétben több elemű határciklus egyik esetben sem volt, csak a két fixpont, viszont más kiindulópontból is eljuthatunk a 000 állapotba, míg ez a szinkron esetben nem volt lehetséges. De ezen esetekben is igaz, hogy az 111 állapot vonzási tartománya nagyobb.

2. Ferromágneses Ising modell vizsgálata rácson

Spinek rendszerét szimuláltam egy 20 x 20-as 2 dimenziós négyzetrácson ($N = 20$), ahol minden pontnak 4 közvetlen szomszédja van. A pontok az 1 és -1 értékeket tudják felvenni. Minden spin a 4 közvetlen szomszéddal hat kölcsön periodikus határfeltételt alkalmazva. A következő léptetési szabályt használtam:

1. Véletlenszerűen kiválasztottam egy darab spint.
2. Kiszámoltam, hogy értékét megtartva, vagy megváltoztatva nagyobb az energiája.
3. Ha a változtatással kapott energia kisebb, akkor az értéket megváltoztattam (átfordítottam a spint).
4. Ha a változtatással kapott energia nagyobb, akkor exp(-1/T) valószínűséggel fordítottam át a spint. (Termikus gerjesztés.)

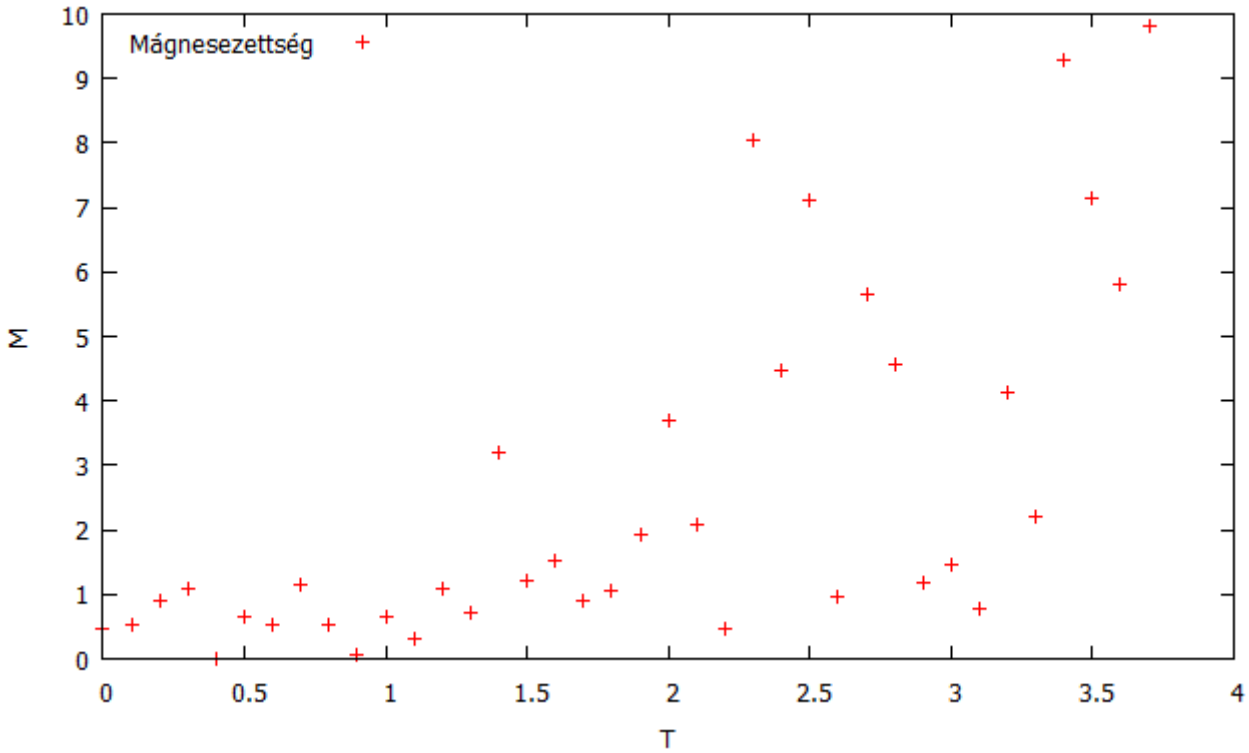
Ezt ismételtem 100 000 x N x N lépésen keresztül.

Egy adott spin energiája a konstans faktoroktól eltekintve így áll elő: $E_i \sim \sum_j -\sigma_i \sigma_j$, ahol $\sigma_i \pm 1$, i a kérdéses spint jelöli, j pedig a környező spineket indexeli (természetesen figyelembe véve a határfeltételt). A konstans faktor azért nem számít, mert úgyis csak az érdekel minket, hogy két energia közül melyik a nagyobb. -σ_i kihozható a szumma alól, így elegendő azt csinálni, hogy a környező spinek összegét hasonlítjuk össze a vizsgált spin értékével (előjelével). Az összegzést elvégeztem, megszoroztam σ_i-vel. Ha ez az érték negatív, akkor energetikailag megéri átfordítani a spint. Ha pozitív, akkor döntünk a hőmérséklet alapján. Ha az érték 0, akkor a spint átfordítjuk. A valószínűségből is elhagytam minden konstans szorzót, de minket úgyis csak a görbe menete

érdekel, és *T*-ből egy olyan intervallumra futtattam végig a szimulációt, ahol a valószínűség 0-ről felmegy közel 1-re. (A szimuláció hosszú futási ideje ellenére a megadott 3,0 helyett 3,7-ig számoltam.)

Megjegyzendő, hogy a léptetési mechanizmus miatt a különböző pontok nem feltétlen ugyanannyiszor lettek léptetve. Mivel azonban statisztikai mennyiségű lépést hajtunk végre, az ebből fakadó pontatlanságok elhanyagolhatók, a rendszernek pedig van ideje bekonvergálni valamilyen végállapotba.

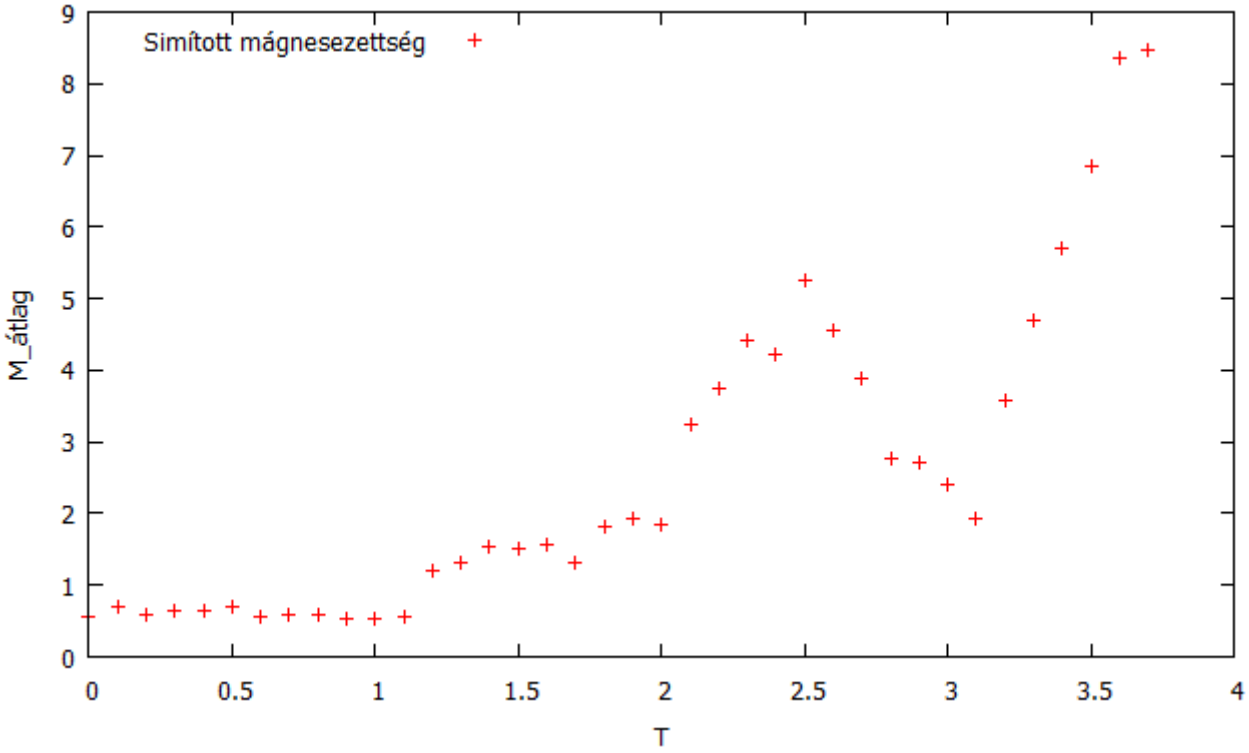
Minden hőmérsékletre az utolsó 1000*N*N = 400 000 lépésben (utolsó 1%) szummáztam a spineket (vagyis kiszámoltam a mágnesezettséget) és ezek abszolútértékét átlagoltam a 400 000 esetre. Az a feltételezés, hogy a rendszer ekkorra már beállt egy meghatározott állapotba. A kapott adatokat a *4. ábra* tartalmazza.



4. ábra. A szimulációból kapott mágneseeztség értékek a hőmérséklet függvényében.

Mivel az adatoknak elég nagy a szórása, a függvény menetének jobb láthatósága érdekében minden pontot újraszámoltam oly módon, hogy az előtte lévő kettő, és az utána lévő kettő értéket hozzáváve öt környező adatot átlagoltam. Így a függvény kisimult. A kapott étékek az *5. ábrán* láthatók.

Az elméleti várakozás az, hogy kis hőmérsékletekre a rendszer egy nagy mágnesezettségű állapotba áll be, nagy hőmérsékleten viszont nagyobb fluktuációk jelennek meg, és az átlagos mágnesezettségnek nullához kellene konvergálnia. Ezzel ellentétben az én esetemben egy T-vel növekvő függvényt kaptam.



5. ábra. Ising modell átlagolással kisimított mágnesezettsége a hőmérséklet függvényében.