1. Logisztikus leképezés bifurkációs diagramja

A logisztikus leképezést a következő iterációs lépés definiálja:

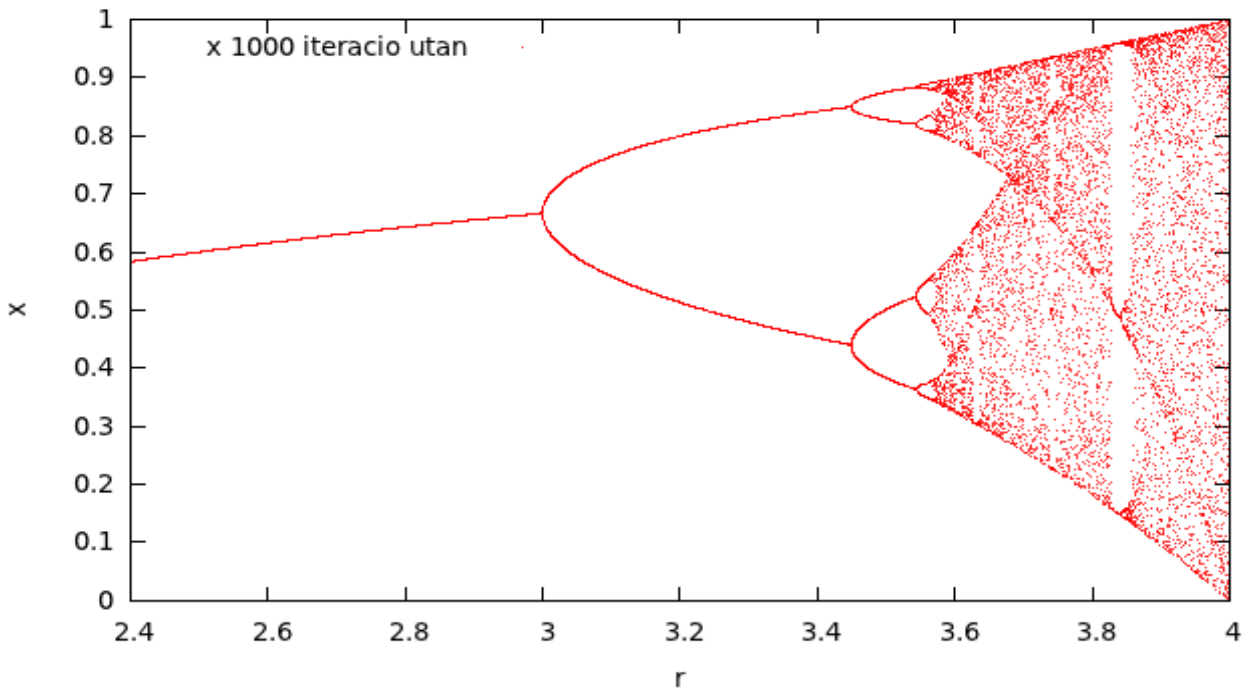
$$x_{n+1}=r\,x_n(1-x_n)$$

ahol *r* az úgynevezett kontroll-paraméter. Ez a [0,1] intervallumból a [0,1] intervallumba képez, így akárhányszor megismételhető. *r* függvényében a leképezés kvalitatíve különböző módokon viselkedhet. Lehet benne egy, vagy több fixpont, ahova az iteráció során a kezdőértéktől függően *x* bekonvergál, vagy határérték nélkül kaotikus módon viselkedik.

A rendszer viselkedésének szemléltetésére egy mód a bifurkációs diagram elkészítése. Ez *r* függvényében ábrázolja a rendszer fixpontját, vagy fixpontjait. Ezt numerikusan úgy lehet megoldani, hogy elegendően sok iterációs lépést hajtunk végre. Ezt legszélesebb esetben az $r\in[0,4]$ intervallumban tehető meg, mert különben kiléphetünk a [0,1] intervallumból.

A diagram legenerálására *C++* programot írtam. Különböző *r* értékekre véletlenszerű kiinduló *x* értékeket 1000 lépésen keresztül iteráltam. A [0,1] intervallumon egyenletes eloszlású kiinduló értékeket a *GSL* függvénykönyvtár *mt19937* véletlenszám generátorával állítottam elő. Minden *r*-hez egy *x* értéket számoltam, de *r* lépésköze elegendően kicsi volt ahhoz ($5\cdot10^{-5}$), hogy közeli *r* értékre sok pontot kapjunk, így a bifurkációk után is sok adatot kaptam a rendszer egy-egy állapotához (valamint a felbontás jóval kisebb az *1. ábra* felbontásánál, így a valójában egyértékű függvény többértékűnek látszik az ábrán).

A nem érdekes részt levágva az értékeket *GNUPLOT*-tal ábrázoltam. A kapott diagram az *1. ábrán* látható.



1. ábra. Logisztikus leképezés bifurkációs diagramja

2. Lorenz-tor Hausdorff-dimenziójának mérése

A Lorenz-modellt a következő közönséges differenciálegyenlet-rendszer definiálja:

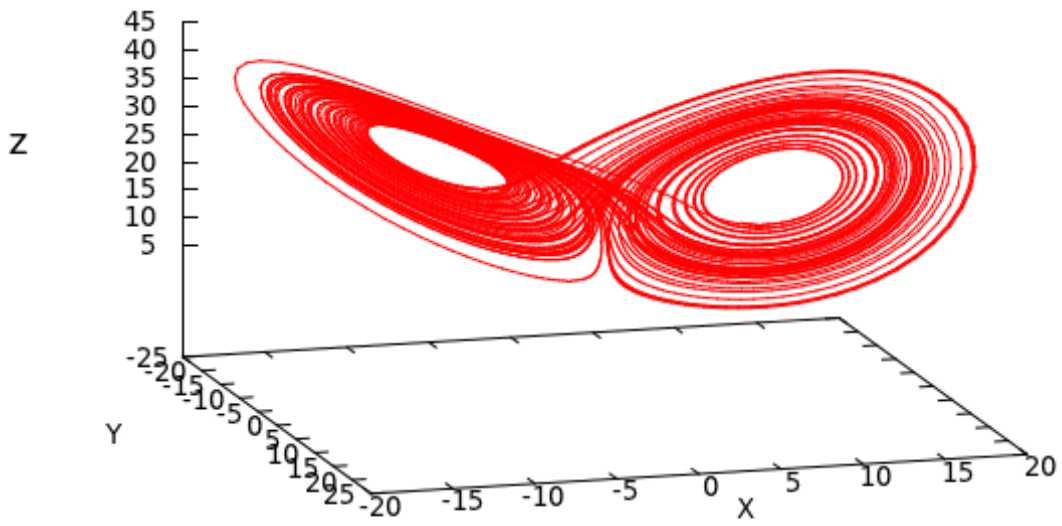
$$\frac{dx}{dt}=\sigma(y-x)$$

$$\frac{dy}{dt}=x(\rho-z)-y$$

$$\frac{dx}{dt}=xy-\beta z$$

A következő paraméterezést használtam: $\sigma=28$, $\rho=10$ és $\beta=8/3$.

Az egyenletrendszert negyedrendű, fix lépésközű Runge-Kutta módszerrel oldottam meg, szintén a *GSL* függvénykönyvtár segítségével, $dt=0{,}005$ lépésközzel. A $30<t<1000$ intervallumon dolgoztam tovább. Az első szakasz levágása azért fontos, mert így a rendszer már rááll az attraktorra, ezért a kezdőfeltételek pontos értéke nem is lényeges. A kapott görbe a *2. ábrán* látható.



2. ábra. Lorenz-modell attraktora

Miután megkaptam a görbe adatait, mindhárom kiterjedésben megkerestem a legkisebb, és legnagyobb értékeket, majd ezeket M egyenlő részre osztva a befoglaló téglatestet M^3 részre osztottam. Újra végigmenve a görbén megjelöltem azokat a dobozokat, amelyekben volt pont, és utólag összeszámoltam őket. Ennél a lépésnél fontos, hogy a dobozok kiterjedéséhez képest *a lépéskö* kicsi legyen, hiszen ha a differenciálegyenlet-rendszer megoldásakor akkorát lépünk, hogy "átugrunk" egy dobozt, akkor a kihagyott dobozt nem számoljuk, holott a matematikai görbe átmegy rajta. Tehát *M* nem lehet

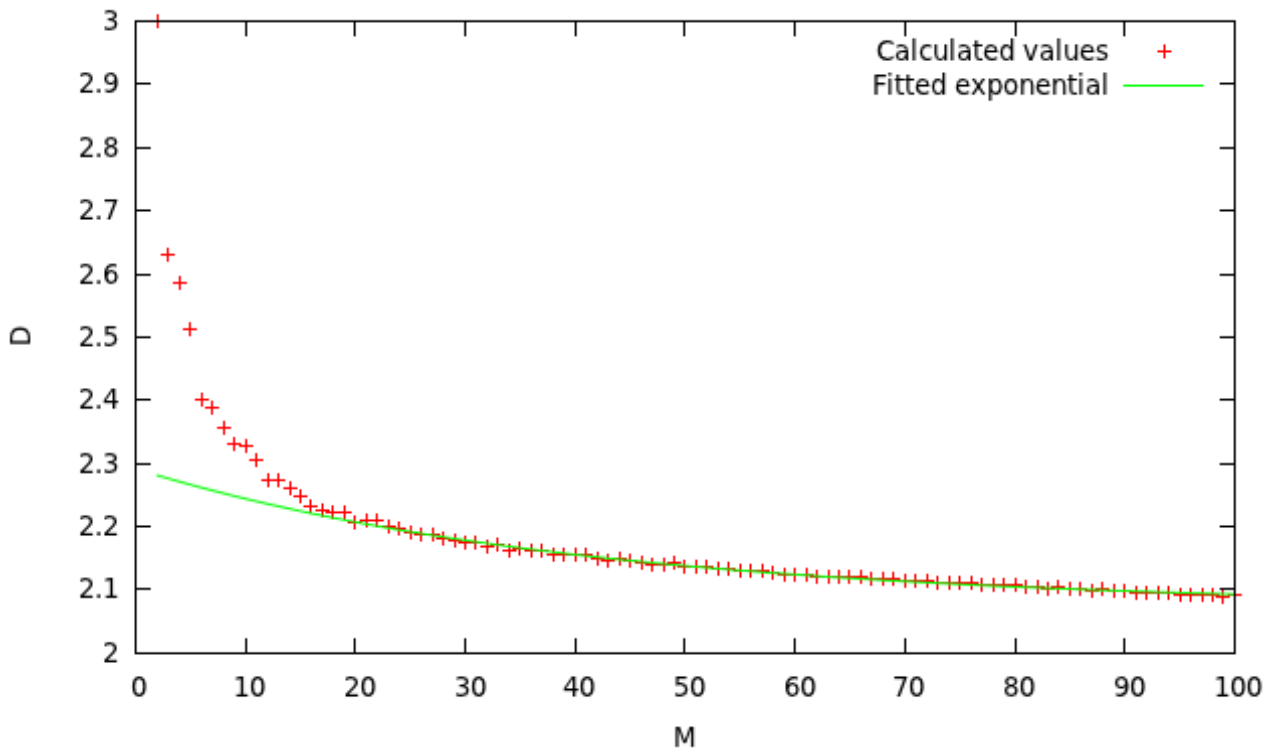
túlzottan kicsi. Túlzottan nagy sem lehet, mert akkor a számolás nyilvánvalóan pontatlan.

Ha *N*-nel jelöljük azon dobozok számát, amiben találtunk legalább 1 pontot, akkor a Hausdorff-dimenziót a következőképpen kapjuk meg:

$$D=\frac{\ln N(M)}{\ln M}$$

Elméletileg ennek a kifejezésnek az $M\to\infty$ határesetét kellene venni, de numerikus okokból, és a fent elmondottak miatt ezt nem tehetjük meg.

Különböző *M* értékekre kiszámoltam ezt a számot *M* = 2 és *M* = 100 között. Az alacsonyabb értékek nyilván nagyon pontatlanok, de illusztrációként ezeket is meghatároztam. A kapott *D* értékeket *M* függvényében a *3. ábrán* ábrázoltam. Látszik, hogy konvergálnak. Feltételezve, hogy exponenciálisan konvergálnak, az első 20 értéket kihagyva exponenciális függvényt illesztettem az adatokra. Az illesztett görbét a *3. ábra* szintén tartalmazza.



3. ábra. Lorenz-attraktor számolt Hausdorff-dimenziói különböző dobozméretek mellett.

A görbe jól illeszkedett. Az illesztésből kapott határértéket tekintem a végleges Hausdorff-dimenziónak.

$$D_H=2.074\pm0.0018$$

Ez megfelel az intuíciónak, miszerint 2 és 3 közötti számot kell kapnunk, és jól illeszkedik az irodalomban talált $D_H=2.06\pm0.01$ értékhez.
(http://en.wikipedia.org/wiki/Lorenz_system)