1. Bevezetés

A gyakorlat során különböző szabályokkal felépített gráfok tulajdonságait vizsgáltam. Mértem a fokszám eloszlást, a perkolációs küszöböt, azaz azt, hogy több szeparált komponens milyen összekötöttségi valószínűségnél válik egy nagy összefüggővé, valamint az átmérőt, azaz bármely két pont közötti legrövidebb utakból a leghosszabbat. Ezeket Erdős-Rényi, valamint skálafüggetlen hálózatokra vizsgáltam.

A feladat megoldására C++ programot írtam, ami a következőképpen működött. A gráfokat az összekötöttségi mátrixszal (A) jellemeztem. Ez egy N x N-es mátrix, minek (i,j) eleme 1, ha az i és j pontokat él köti össze, és 0 ha nem. Ez esetünkben egy szimmetrikus mátrix, mert a gráf nem irányított. Diagonális elemei 0-k. Ezen mátrixok generálásának módját az adott gráfok vizsgálatánál írom le.

A fokszám eloszlás mérése egyszerű: egy N elemű tömbbe a program összeszámolja a mátrix adott sora elemeinek összegét. Ez egy N elemű vektor lesz, aminek elemei azt adják meg, hogy az adott ponthoz hány él kapcsolódik (azaz a fokszámot). Ez alapján egy N – 1 elemű tömbbe már könnyedén megalkotjuk ennek a hisztogramját. A program nem normált fokszám eloszlást számolt, hanem hisztogramot. Emiatt az összehosonlítás kedvéért az elméleti értékeket N-nel felszoroztam.

Az átmérőt a következő elven mértem. Belátható, hogy az összekötöttségi mátrix n-edik hatványának (i,j) eleme az i és j pontok közötti n hosszúságú útvonalakat számolja le. Két pont távolsága tehát az a legkisebb n, ahol A^n mátrix adott eleme 0-tól különböző. Nekünk az utak maximumára van szükségünk, tehát addig szorozzuk önmagával A-t egyre növekvő hatványok szerint, amíg minden eleme leglalább egyszer volt 0-tól különböző. Amelyik n-nél ez megtörténik, az a gráf átmérője. Ha a gráf nem összefüggő, akkor ez N – 1 próbálkozás után sem fog megtörténni. Mivel ez a lehetséges leghosszabb út, ennyi után a program leállt, és közölte, hogy a gráf nem összefüggő. Így tehát a perkolációt is tudjuk vizsgálni.

2. Erdős-Rényi gráfok vizsgálata

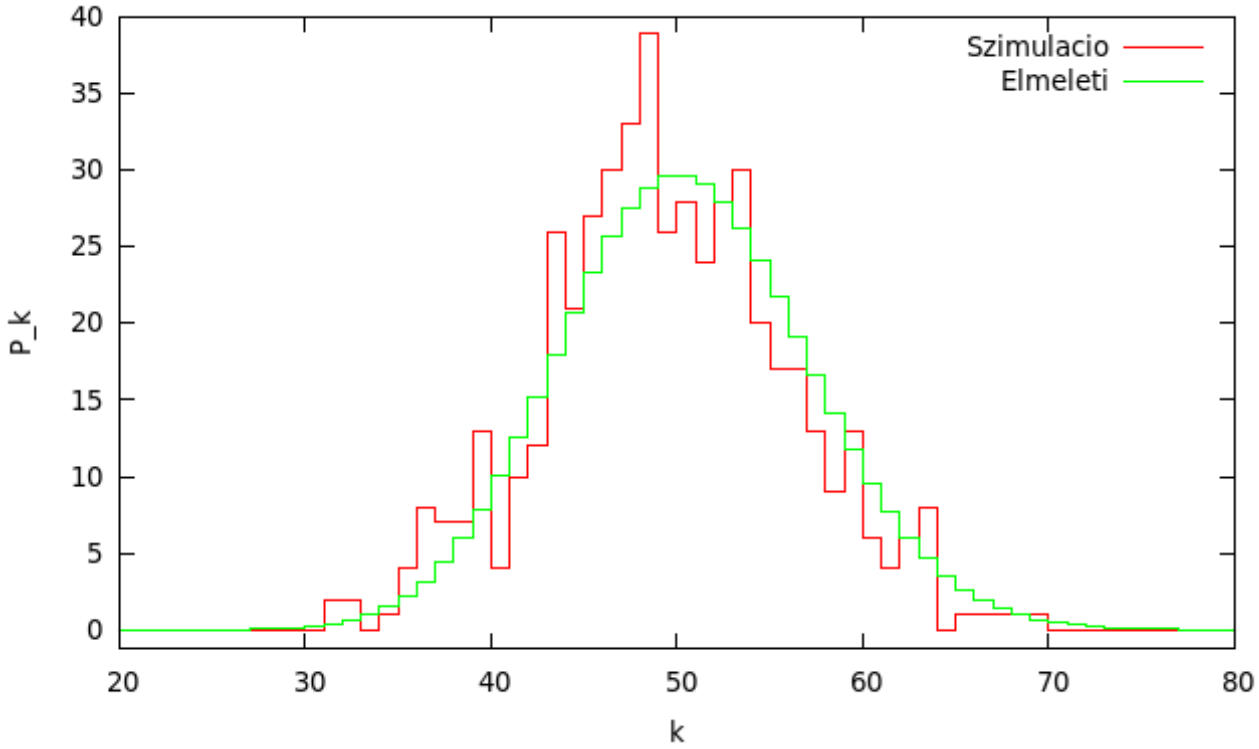
Az Erdős-Rényi gráf olyan gráf, ahol N pontunk van, és bármely pár p valószínűséggel van összekötve éllel. Generálni egyszerű: két egymásba ágyazott ciklussal végigmegyünk a gráf valamelyik felén, és minden elembe bizonyos valószínűséggel 1-et írunk, a többibe 0-t.

N = 500 mellett legeneráltam a gráfot különböző p-k mellett. p 0 és 1 között változott 0,05-ös lépésközzel. Minden p-re számoltam fokszám eloszlást és átmérőt. Vizsgáltam, hogy mekkora p-nél lesz először összefüggő (perkolációs küszöb), és ezt összevetettem az elméleti eredménnyel:

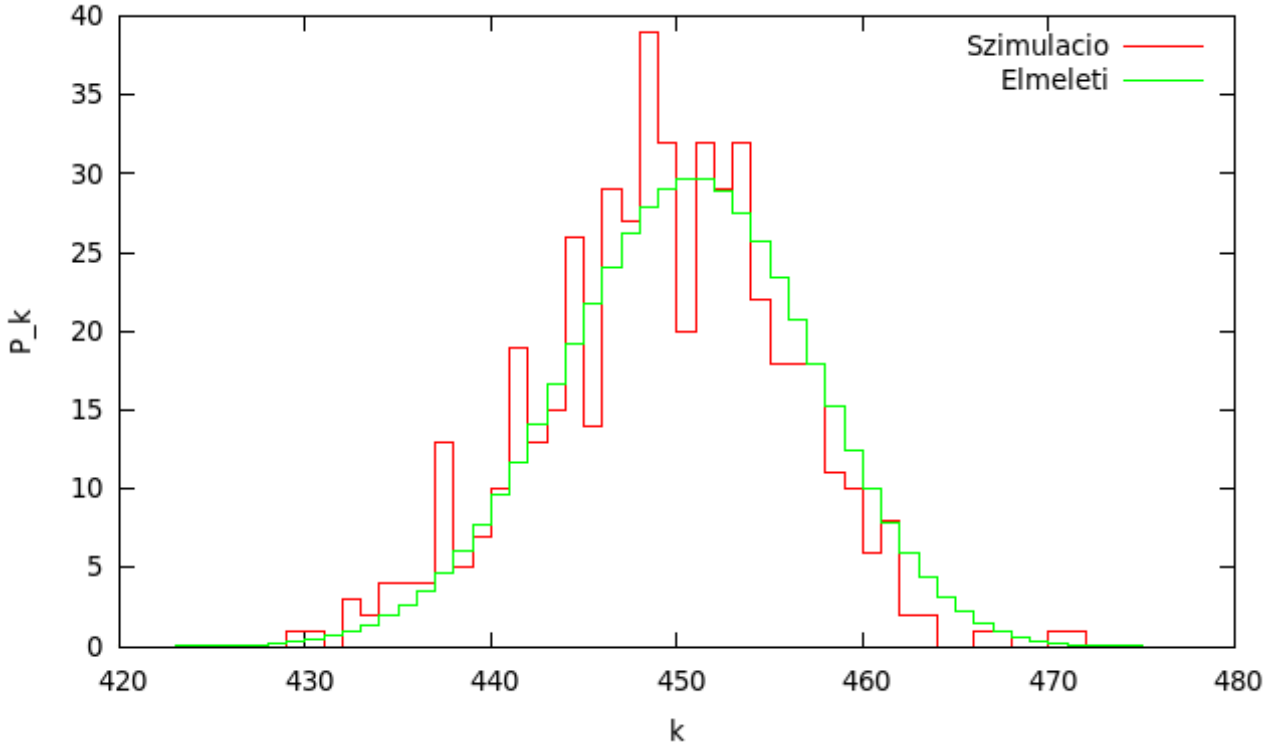
$$\sum_k k(k-2)\,p_k = \sum_k k(k-2)\,F_k / N = 0$$

Ahol F_k a normálatlan fokszám eloszlás, k pedig a fokszám. Amelyik p-re ez teljesül, ott lesz az elméleti perkolációs küszöb. Erre mind az elméleti, mind a szimulált eredmény 0,05 lett.

A fokszám eloszlást nem ábrázolom minden kiszámolt *p*-re, csak kettőre. Itt az elméleti jóslat a binomiális eloszlás (illetve az $N \to \infty$ határesetben Poisson, de én a binomiálissal számoltam). Az *1. ábrán* látható az eloszlás *p* = 0,1-re, a *2. ábrán p* = 0,9-re.



1. ábra: 500 pontból álló Erdős-Rényi gráf fokszám eloszlása elméleti jóslat és szimuláció alapján p = 0,1 összekötöttségi valószínűség esetén.

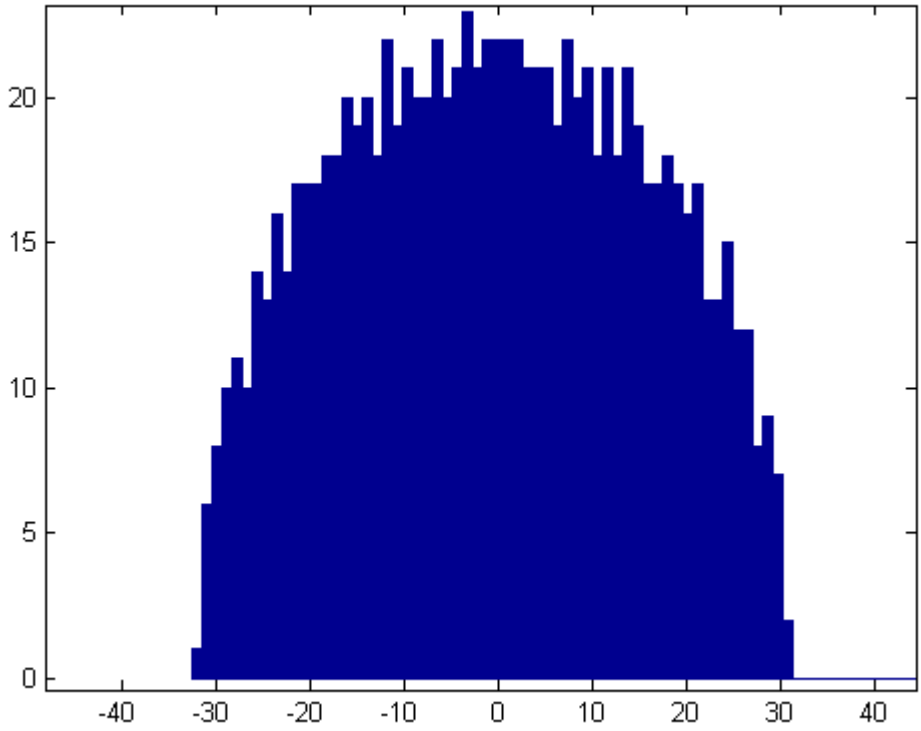


2. ábra: 500 pontból álló Erdős-Rényi gráf fokszám eloszlása elméleti jóslat és szimuláció alapján p = 0,9 összekötöttségi valószínűség esetén.

Látszik, hogy a fokszámokat jó közelítéssel visszakaptuk.

Az átmérő nagyon hamar kicsire esett vissza: 3, majd 2 adódott már egész kicsi p-kre is.

Vizsgáltam még az összekötöttségi mátrix spektrumát. Erre MatLab programot írtam, ami ugyanezen elv alapján generált egy 1000 x 1000-es mátrixot p = 0,5-ös összekötöttséggel. Kiszámoltam a sajátértékeit, majd 1 nagyságú binekre osztva hisztogramot gyártottam. Az eredény a *3. ábrán* látható.



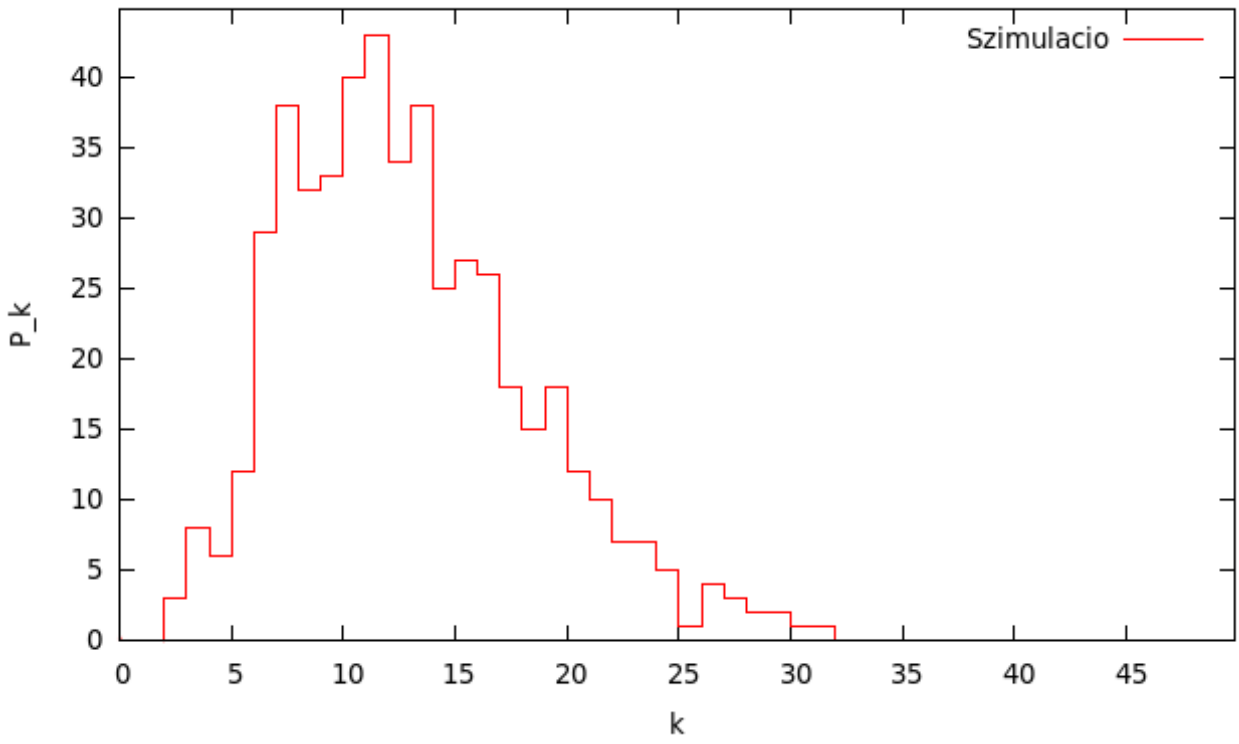
3. ábra: 1000 x 1000-es Erdős-Rényi gráf sajátérték spektruma. Jól láthatóan tényleg egy flékörre illeszkednek a Wigner-törvény szerint.

A Wigner-féle félkör törvény alapján a spektrumnak egy félkört kell adnia. Az ábrán látható, hogy ez valóban így van.

3. Skálafüggetlen gráf vizsgálata

Ugyanezeket a vizsgálatokat elvégeztem egy skálafüggetlen gráfon is. Ugyanazt a programot használtam, mint a fent leírtaknál, csak másképp alkottam meg a gráfot jellemző összekötöttségi *A* mátrixot. Kiindulásként egy p/10-es összekötöttségű Erdős-Rényi gráfot alkottam, majd kiszámoltam a fent leírt módon a fokszám eloszlást. Ezután egyenként új linkeket tettem be a gráfba akként, hogy véletlenszerűen választottam két pontot a fokszámokkal súlyozva, és azokat kötöttem össze. Ezt csinlátam egészen addig, amíg az átlagos fokszám *pN* nem lett. Miután megkaptam etz a mátrixot, a következőkben ugyanúgy jártam el, mint a fenti esetben.

A *4. ábra* mutatja az így generált, p = 0,05-ös gráf fokszám eloszlását. Ennél nagyobb p-nél már eltűnnek a kis fokszámú pontok, tehát nem érvényes a hatványfüggvény eloszlás, már itt is csak az eloszlás farkán látszik a lassú lecsengés. A vizsgált esetekben a gráf összefüggő volt.



Az átmérő itt is igen kis értékekről indult, ez is mutatja, hogy kevés él is elég a perklációhoz. Kisebb p-kre nagyobb az átmérő. A számítást újra elvégeztem 0 és 0,05 között 0,005-ös lépésközzel, hogy több információt kapjunk erről a területről. Az eredmény az lett, hogy 0,04 és 0,045 között lett a gráf összefüggő, és fölötte rögtön 5-nek adódott az átmérő, tehát a perkoláció valahol ekörül történik. Ezt már elég kis felbontásnak ítélem, hogy eredménynek tekinthessem.