Kísérletek kettős ingával

Mérési jegyzőkönyv

Rudolf Ádám, Kozics György

Fizikus MSc.

Mérésvezető: Varga Dezső, Bagoly Zsolt

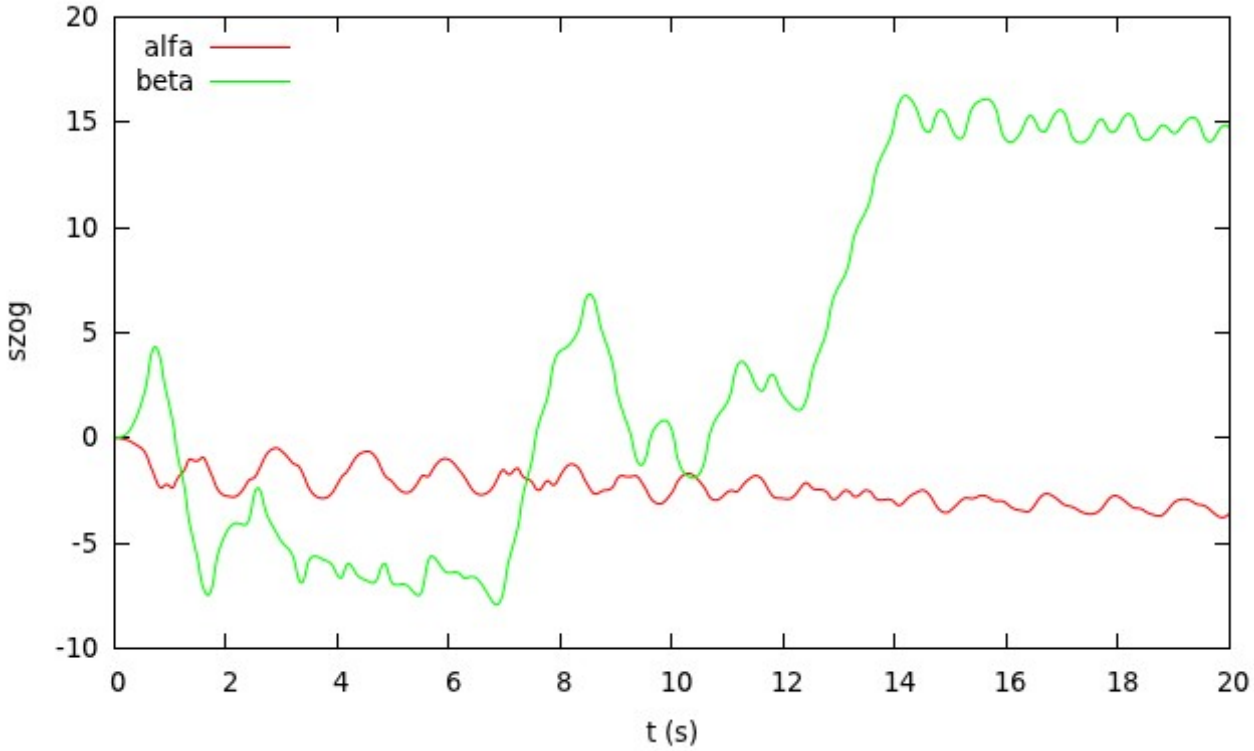
Mérés időpontja: 2012. március 7., 14.

Leadás időpontja: 2012. április 18.

A laborgyakorlat során kettős inga vizsgálata volt a feladatunk, annak kaotikus viselkedésére koncentrálva, elsősorban a Ljapunov exponens kimérésével, és annak energiafüggésének vizsgálatával.

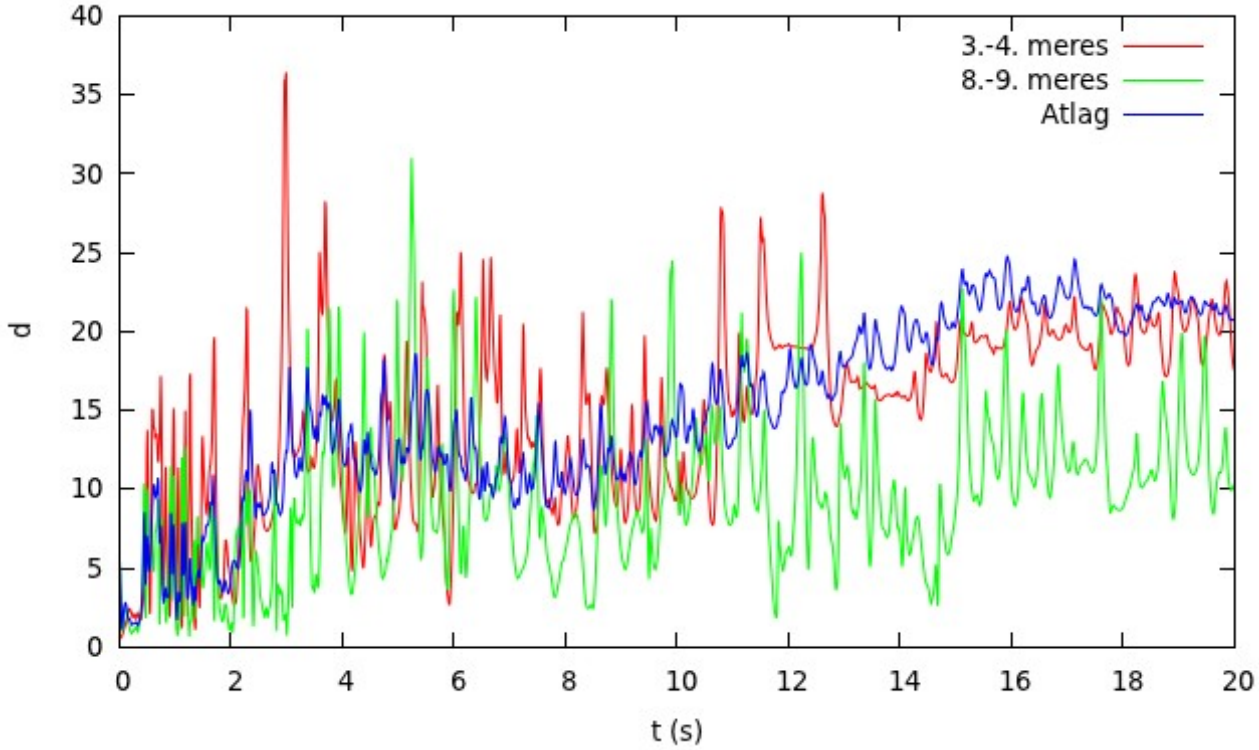
Az indítószerkezet segítségével 6 különböző pozícióból 10-10 mérést végeztünk, ahol tehettük, kétféleképpen is (jobbra, vagy balra lóg ki az inga közepe). Így összesen 80 adatsort kaptunk, amit tízesével értékeltünk ki a következő módon.

C++ programot írtunk az adatsorok kiértékelésére. A .wav állományok beolvasása és kétfelé bontása után az első cél a negatív négyszögimpulzusként megjelenő jelek azonosítása volt. Ehhez egy vágást csináltunk -2000-nél, mert a zaj ennél mindig nagyobb, a jel ennél mindig kisebb volt. Ez alapján két tiszta, négyszögimpulzusos adatsort kaptunk. A mintavételezési frekvencia ismeretében ezután a jelek kezdetének idejét elmentettük, és hosszuktól függően 5 fokot hozzáadtunk (pontosabban annak radiánbeli értékét), vagy kivontunk az aktuális szögértékből, amit 0-ról indítottunk. Az időt eltoltuk, hogy az első beérkező impulzus legyen a 0 érték. Ezzel diszkrét, nem állandó lépésközű adatsorunk volt a szögértékekről az idő függvényében, amiből köbös spline interpolációval szép, sima szögfüggéseket kaptunk, megadott lépésközzel. Ennek az is az előnye, hogy az analitikus deriváltak értékeit is megkaptuk az adott pontokban, így a szögsebességek is megvannak, vagyis ismerjük már a fázistérbeli trajektóriát. Egy legmagasabb állasból indított ilyen trajektória, a két szögértékkel az *1. ábrán* látható.

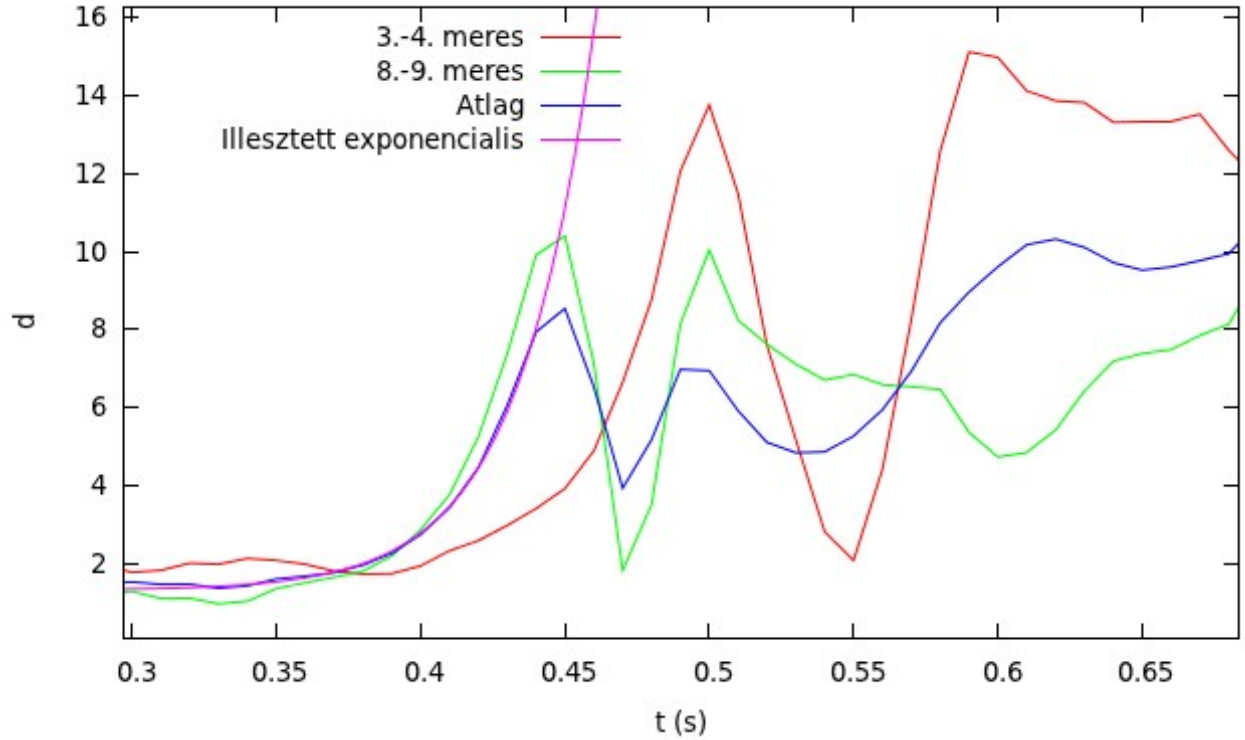


1. ábra. A legmagasabbról indított egyik mérés két szögének időfüggése. Látszik, hogy az alsó inga (beta) többször átfordult, míg a fölső (alfa) egyszer sem. Ezt nem is tehette volna meg 0 kezdősebességgel. Az is látszik, hogy nem a 0-ban áll meg, hiszen az indítási és a nyugalmi pozíció különbözik kb. π szöggel.

A Ljapunov exponens meghatározásához tízesével beolvastuk az adatsorokat, elvégezve a fent leírtakat, és az idő függvényében kiszámoltuk a fázistérbeli távolságokat párosával (10 adatsorhoz 9 párt számoltunk) négyzetes összegzéssel. ($d=\sqrt{(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\beta_1-\beta_2)^2+(\dot{\alpha}_1-\dot{\alpha}_2)^2+(\dot{\beta}_1-\dot{\beta}_2)^2}$, a *d* a fázistérbeli távolság, *α* a felső, *β* az alsó szögérték, 1 és 2 pedig a különböző mérések indexei.) A legfölső helyzetből indított kísérletek közül két méréspár fázistérbeli távolságának időfüggése látszik a *2. ábrán*, majd a *3. ábrán* ugyanez kinagyítva az elején.



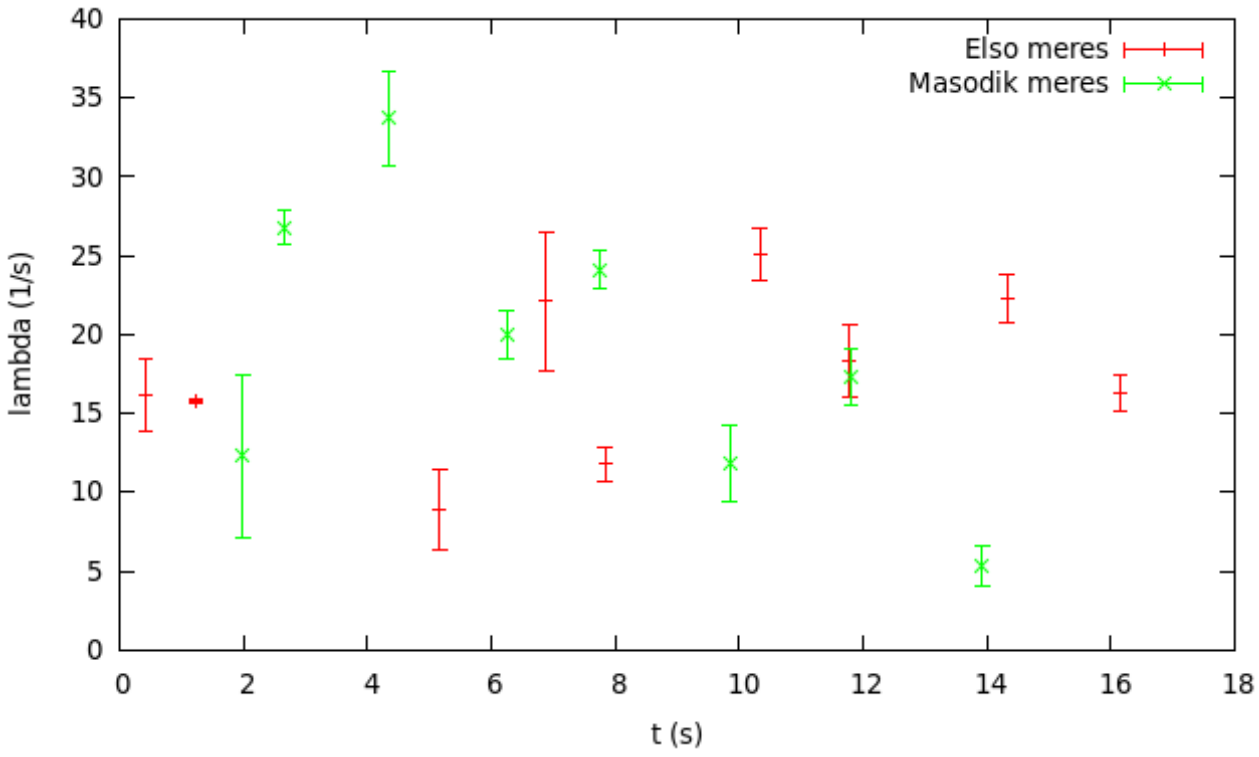
2. ábra. Legfölső állásból indított mérések két méréspárjának fázistérbeli különbségeinek időfüggése, valamint 9 méréspárra ugyanez átlagolva. Látszik a növekvő tendencia, és hogy hosszú távon lecseng a változás. Az is látszik, hogy a kiátlagolt görbe kevésbé változik rövid távon, mint az egyediek.



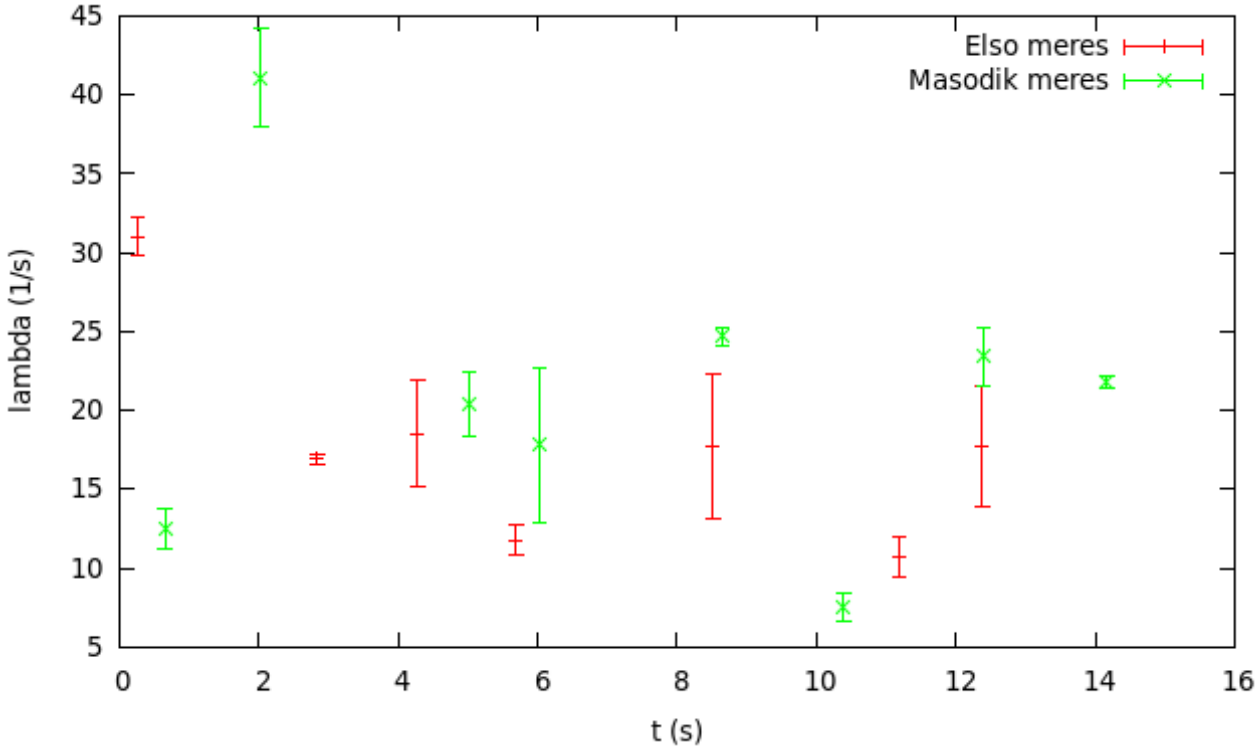
3. ábra. Legfölső állásból indított mérések két méréspárjának fázistérbeli különbségeinek időfüggése, valamint 9 méréspárra ugyanez átlagolva. Ábrázoltuk még a kiátlagolt görbe egy szakaszára illesztett exponenciális függvényt. Ilyenek segítségével határozzuk meg a Ljapunov exponenseket.

Ezek a görbék közel sem tiszta exponenciálisok, de nem is várjuk, hiszen egyrészt az inga oda-vissza rángatózik, így mindig lesznek benne hirtelen közeledések (a fázistér véges mivolta miatt egy karakterisztikus idő múlva muszáj újra közeledniük), másrészt a disszipáció miatt mindenképpen konvergál valamilyen konstans értékhez a mozgás közben megtett átfordulások számától függően. Vagyis a határérték 2π többszöröse kell, hogy legyen. Azonban rövid szakaszokon egyértelműen exponenciális, ahogyan az látszik is a *3. ábrán*. Hogy a statisztikus viselkedés látszódjon, a 9 adatsort minden időpontra átlagoltuk, és az átlaguk időfüggését is ábrázoltuk a *2. ábrán* és a *3. ábrán*. Erre a görbére is igaz, amit az egyediekre elmondtunk, látszik a trajektóriák távolodása, és beállása valamilyen konstansra (ez persze már nem feltétlenül egy átfordulás egész számú többszöröséhez tart). Látszik az is, hogy ez a görbe kevésbé fluktuál, mint a két másik ábrázolt.

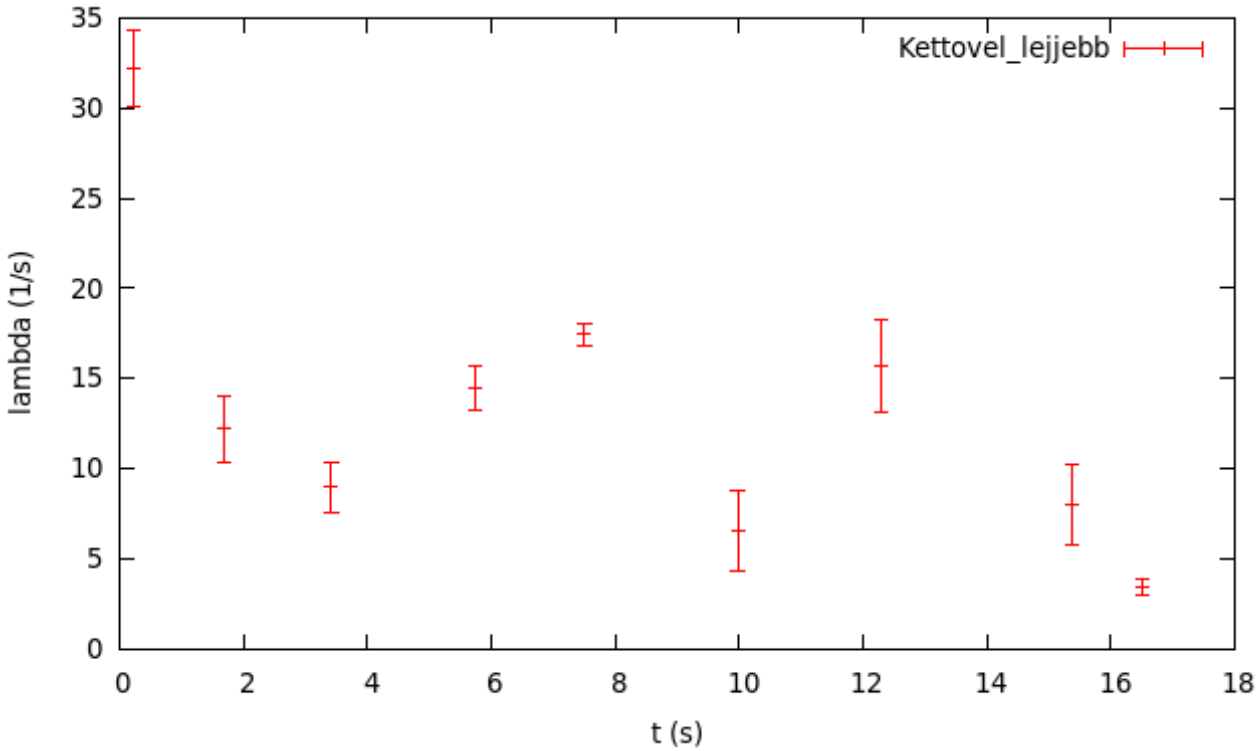
A Ljapunov exponenseket úgy határoztuk meg, hogy ezen átlagolt görbe különböző pontjaira exponenciális függvényt illesztettünk GNUPLOT-tal. Ezek egyike is látszik a *3. ábrán*. Mind a hat indítási pozícióban lehet ábrázolni valamiféle időfüggést ily módon. Az adott érték időpontjának az illesztési intervallum közepét vettük. Ezeket a *4. - 9. ábrák* tartalmazzák, indítási magasság szerint csökkenő sorrendben. Ahol ugyanabból a magasságból két külön pozícióból is csináltunk méréseket, ezeket külön színnel, de azonos ábrán ábrázoltuk. *y* irányú hibának az illesztés hibáját vettük.



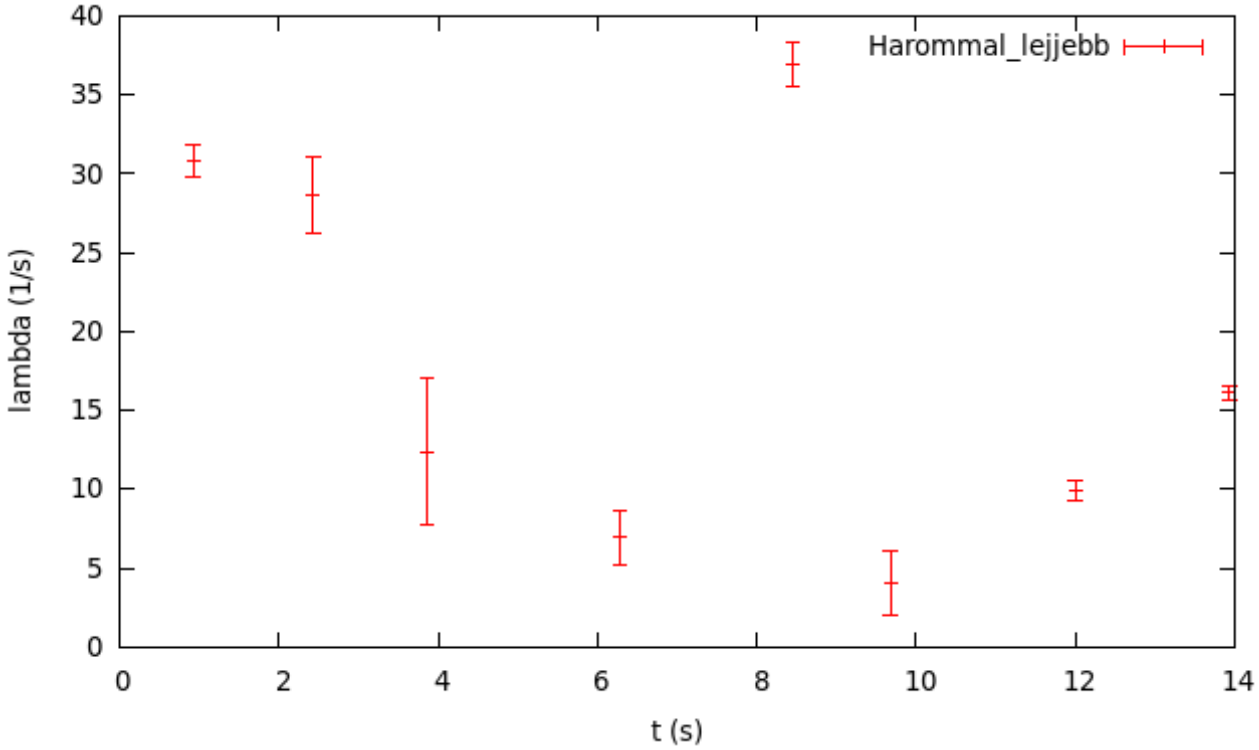
4. ábra: Függőleges helyzetből, kétféleképpen indított kettősinga Ljapunov exponensei az idő függvényében



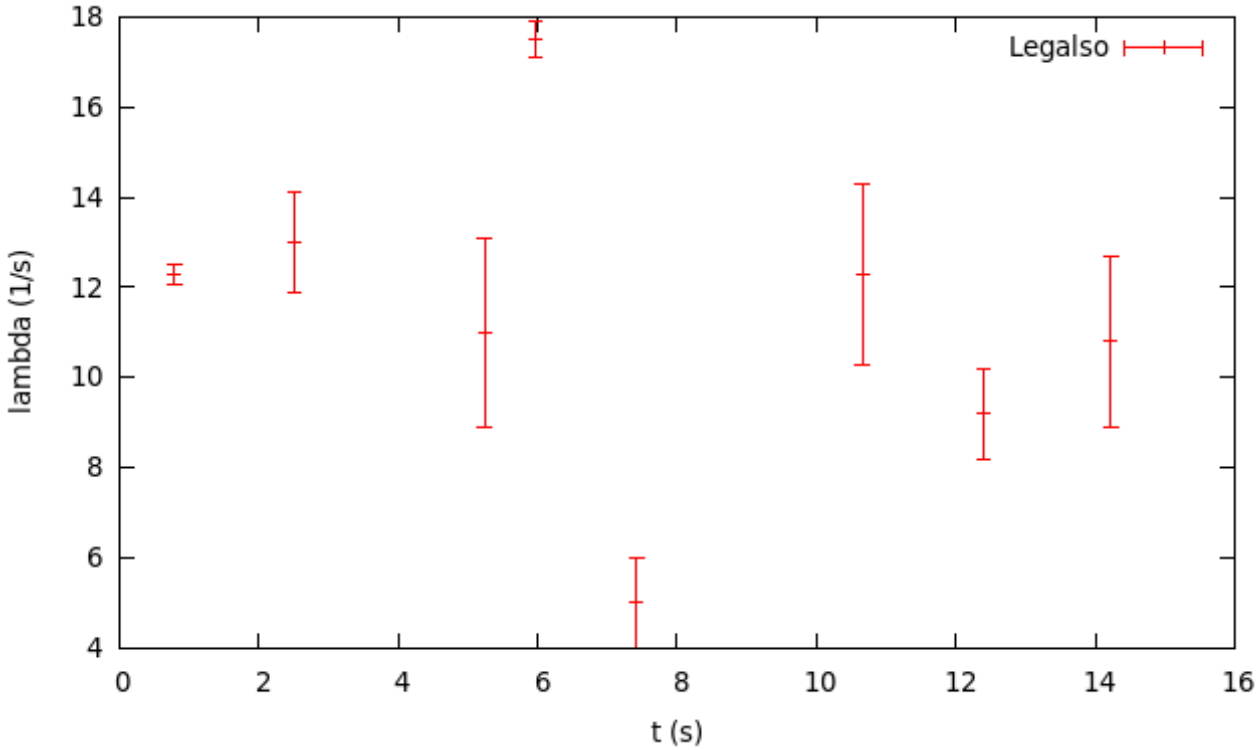
5. ábra: Függőlegestől eggyel lejjebb, kétféleképpen (2-es helyzet) indított kettősinga Ljapunov exponensei az idő függvényében



6. ábra: Függőlegestől kettővel lejjebb (3-es helyzet) indított kettősinga Ljapunov exponensei az idő függvényében

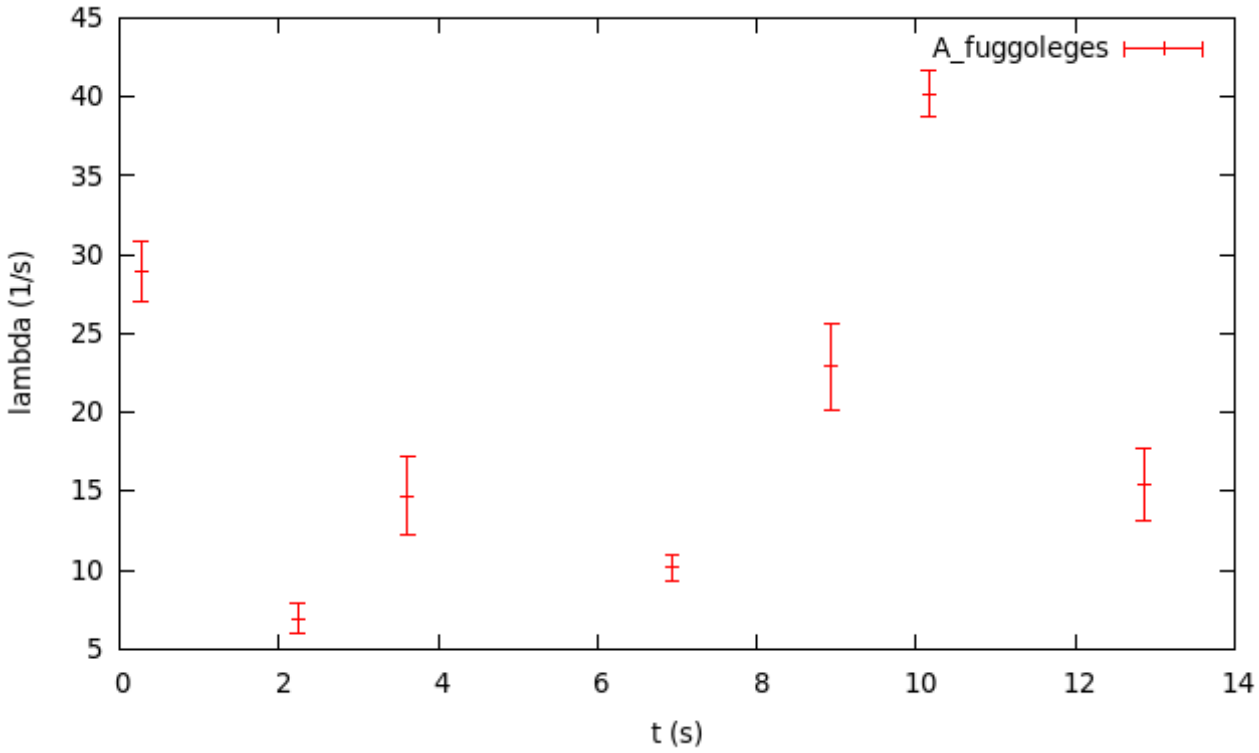


7. ábra: Függőlegestől hárommal lejjebb (4-es helyzet) indított kettősinga Ljapunov exponensei az idő függvényében



8. ábra: Az elérhető legalsó helyzetből (5-ös helyzet) indított kettősinga Ljapunov exponensei az idő függvényében

A fenti ábrák mind olyan helyzeteket mutatnak, ahol az inga vége függőlegesen a fix forgáspont fölött volt. Az indítási helyzetek számozása: függőleges indítás: 1-es, majd lefelé haladva a számok nőnek, egészen addig, amíg az első inga vége kb. a fix forgásponttal egy magasságban van (5-ös helyzet). Az eddigiektől eltérő helyzet volt, amikor egy oldalsó helyzetből indítottuk az ingát oly módon, hogy az alsó kar függőleges volt. Ezt az „A_függőleges” felirat jelzi.



9. ábra: Oldalsó helyzetből indított kettősinga Ljapunov exponensei az idő függvényében

Mivel az exponenciálisok beazonosítása nem volt teljes mértékig egyértelmű feladat, és rendszerint csak kevés pontra tudtunk illeszteni, amik eleve egy interpoláció eredményeként számolt értékek voltak, az exponenseknek viszonylag nagy hibája lett (10% – 20%), és pontos kvantitatív vizsgálatot nem tudunk végezni. Konklúzióként elmondható, hogy az idő előrehaladtával az exponenseket valamiféle csökkenő tendencia látszik, ám a hosszú távú változás kb. a hiba nagyságrendjébe esik.

Még egy dolog, amit megtehetünk, az az, hogy a különböző indítási helyzetekre átlagoljuk az értékeket, és ezeket hasonlítjuk össze. Mivel a kezdeti szögértékeket nem állt módunkban pontosan lemérni, ezért az energiaértékeket nem tudjuk megadni, csak azt, hogy milyen sorrendben csökkennek. A számítást elvégeztük, a kapott eredmények táblázata:

	Átlag (1/s)	**Szórás (1/s)**
1	18	7,1
2	20	8,4
3	13	8,5
4	18	12
5	11	3,5

1. táblázat: Indítási helyzetekre átlagolt Ljapunov exponensek és azok szórása az energia szerint csökkenő sorrendben

Ezeken az értékeken sem látszik jelentős tendencia, a szórások viszonylag nagymértékűek, az eltérések pedig nem tudhatók be egyértelműen valamilyen függvényszerű változásnak annak ellenére sem, hogy az 5-ös helyzet energiája kb. fele az 1-esének.

Összegezve elmondhatjuk, hogy a Ljapunov exponensek pontos kimérése nehéz feladat, és a mi (elég zajos) mérésünk alapján nem állapítható meg semmilyen konkrét energiafüggés.