Modern Fizika Labor

Fizika BSC

A mérés dátuma: 2010. 02 .23.	A mérés száma és címe: 18. Granuláris anyagok	Értékelés:
A beadás dátuma: 2010. 03. 09.	A mérést végezte: Kozics György, Rudolf Ádám	

1. A mérés elve

A granuláris anyagok nagy számú makroszkopikus részecskéből álló anyagok. Ebben a mérettartományban a részecskére ható gravitációs erő, a két részecske összenyomódásakor fellépő taszítóerő és az érintkezési pontokon fellépő súrlódási erő tartozik a legjellemzőbb erőhatások közé. A részecskék helyzeti energiájához képest az egy szabadsági fokra jutó k_bT termikus energia elhanyagolható, így a hőmérséklet átlagoló szerepe megszűnik. Nem alakul ki stabil egyensúlyi helyzet, így külső megzavarás nélkül a rendszer bármely metastabil állapota végtelen sok ideig fennmarad. A részecskék homogén eloszlása helyett tehát rendeződés, szegregáció és komplex struktúrák kialakulása jelenik meg.

A granuláris anyagok leírása még nyugalmi helyzetben sem egyszerű. A fő nehézség ott jelenik meg, hogy a részecskék csak az érintkezési pontokban hatnak kölcsön, amik viszont egy kvázi-véletlenszerű hálózatot alkotnak. A kísérletek tanulsága szerint a legnagyobb feszültségek láncszerű struktúrák mentén lépnek fel, ezeket erő-láncoknak nevezzük. Mivel az erő-láncok lefutását az egyes szemcsék konkrét helyzete határozza meg, így látszólag azonos paraméterekkel rendelkező rendszereknek is lehet különböző a viselkedése.

Régóta ismert tény, hogy a szemcsés anyagokban fellépő nyomás nem írható le a hidrosztatikából ismert $P(z) = \rho g z$ képlettel. Az oszlop magasságát növelve az oszlop alján mérhető nyomás nem nő a végtelenségig, hanem egy karakterisztikus magasság fölött telítésbe megy, így végtelen magas oszlop esetén is véges nyomást mérhetünk. Ez annak köszönhető, hogy a boltívszerűen létrejövő erő-láncok az edény

falának továbbítják a szemcsék súlyából adódó erőt, így egy bizonyos magasság felett az egész anyagot az edény fala tartja meg. A jelenség leírására 1895-ben Jansen javasolt egy egyszerű modellt, aminek a feltevései nem mind megalapozottak, azonban eredményei jól egyeznek a kísérletekkel.

1.1. Janssen modellje

Tekintsünk egy R sugarú függőleges henger alakú edényt megtöltve granuláris anyaggal, melynek átlagos sűrűsége ρ. Tegyük fel, hogy $P(x,y,z) = P(z)$, tehát a nyomás csak a magasságtól függ. Az anyag minden dz vastagságú, $S = R^2\pi$ felületű vízszintes szeletének egyensúlyban kell lennie. Egy ilyen szeletre hat a gravitációs erő, a felette és alatta mérhető nyomás különbségéből származó erő és a falaknál fellépő súrlódási erő:

$$\rho g S dz - dP(z) / dz * S dz - dF_{frict} = 0.$$

Feltesszük, hogy a vízszintes irányban mérhető nyomás arányos a függőleges nyomással: $P_{hor}(z) = KP(z)$, ahol K egy konstans, az ún. Janssen-együttható. A súrlódási erőről pedig feltesszük, hogy felfelé mutat, és a maximális értékét veszi fel, tehát $dF_{frict} = \mu KP(z) * 2\pi R dz$, ahol μ a fal és az anyag közötti súrlódási együttható. Ezt behelyettesítve az egyenletbe majd azt megoldva a következőt kapjuk:

$P(z) = \lambda\rho g(1 - e^{-z/\lambda})$, ahol $\lambda = R/(2\mu K)$, vagyis z növekedésével a nyomás exponenciálisan telítésbe megy át, a telítődés karakterisztikus távolsága pedig λ.

Ebből következik a mért (látszólagos) és a valódi tömegek közötti összefüggés:

$$m_l(m) = m_\infty [1 - e^{-m/m_\infty}].$$

Az első feladat ennek az egyenletnek a levezetése volt. Látszik, hogy $P_\infty = \lambda\rho g$, és mivel $m_l = PA/g$ és $m = zA\rho$, így $m_\infty = A\lambda\rho$, ami a végtelen oszlopmagassághoz tartozó látszólagos tömeg (A a lap felülete). Mivel $z/\lambda = m/m_\infty$, így behelyettesítve megkapjuk, hogy $m_l(m) = m_\infty [1 - e^{-m/m_\infty}]$.

2. A mérés menete

A mérés során 20 db műanyag pohárba azonos mennyiségű granuláris anyagot mértünk ki. A tömeget elektromos mérleggel mértünk, melynek pontossága 2g. A poharakba kimért anyagot egyesével egy d = 4,7 cm átmérőjű hengerbe töltöttük, és minden betöltés után feljegyeztük a mérleg által mutatott tömeget. A mérleget a dugattyú tömegével együtt táráztuk, így azzal a későbbiek folyamán már nem kellett foglalkozni. A mérés során kétféle anyaggal, fajtánként 3-3 független mérést végeztünk. Ahhoz hogy tudjuk, mekkora súlyú anyag van egy pohárban, végeztünk 1-1 méréssorozatot úgy, hogy egy pohárba kanalanként adagoltuk az anyagokat és megmértük a tömegét pohárnak, majd az adatokra egyenest illesztve megkaptuk egy kanálnyi anyag tömegét. Mivel minden pohárba 3 kanálnyit raktunk, így viszonylag pontosan meg tudtuk kapni egy pohárnyi anyag tömegét. A mérési adatok az alábbi táblázatban láthatóak:

Kanalak száma	„A” anyag mért tömege (g)	„B” anyag mért tömege (g)
1	6	6
2	18	18
3	26	26
4	36	34

5	48	42
6	56	50
7	66	58
8	78	68
9	88	78
10	96	86

Az adatokra egyenest illesztettem, majd ebből kiszámoltam egy pohárnyi anyag tömegét:

$m_A = 29{,}7g$

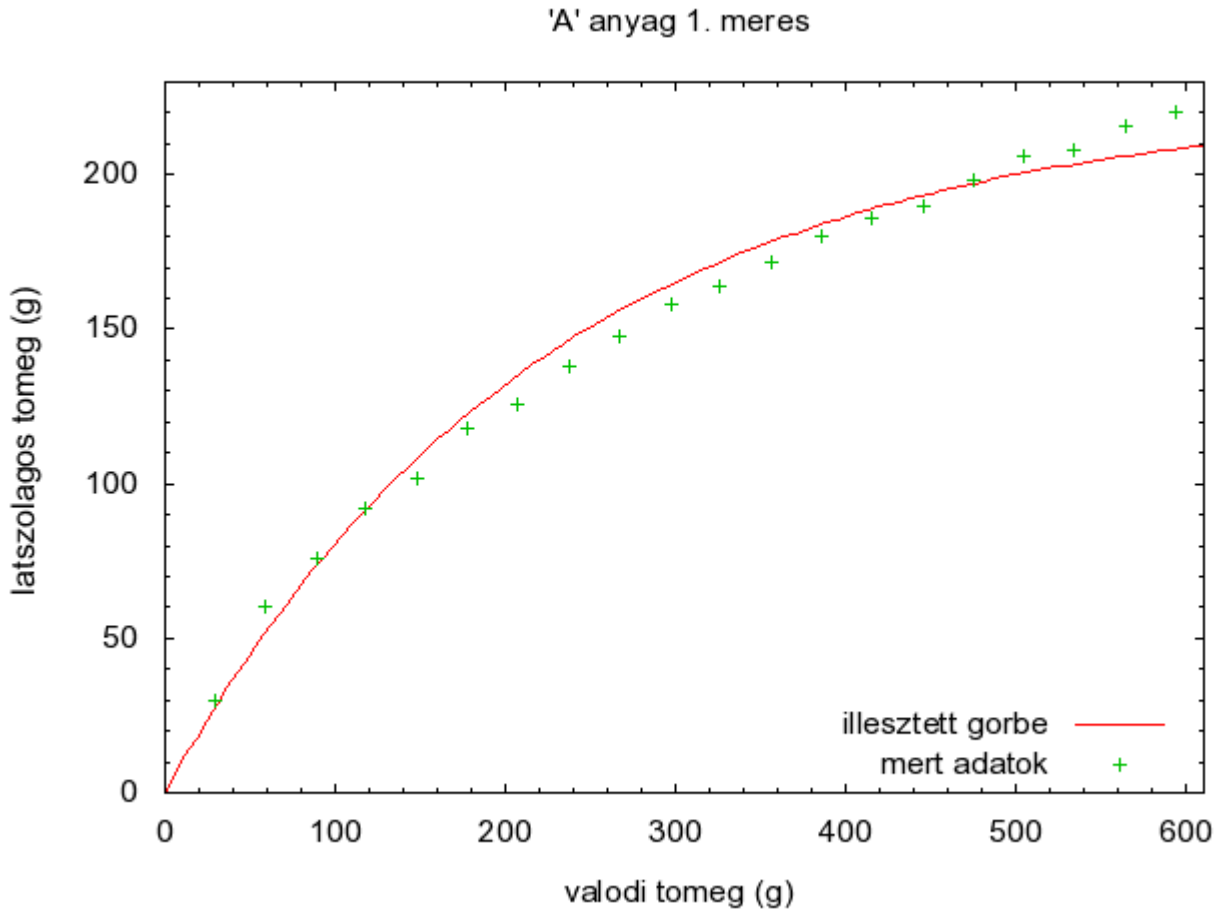
$m_B = 25{,}9g$

A következő táblázatban tüntettem fel a hat mérés eredményét. n a poharak számát, m a valódi tömeget, m_l pedig a látszólatos tömeget jelöli.

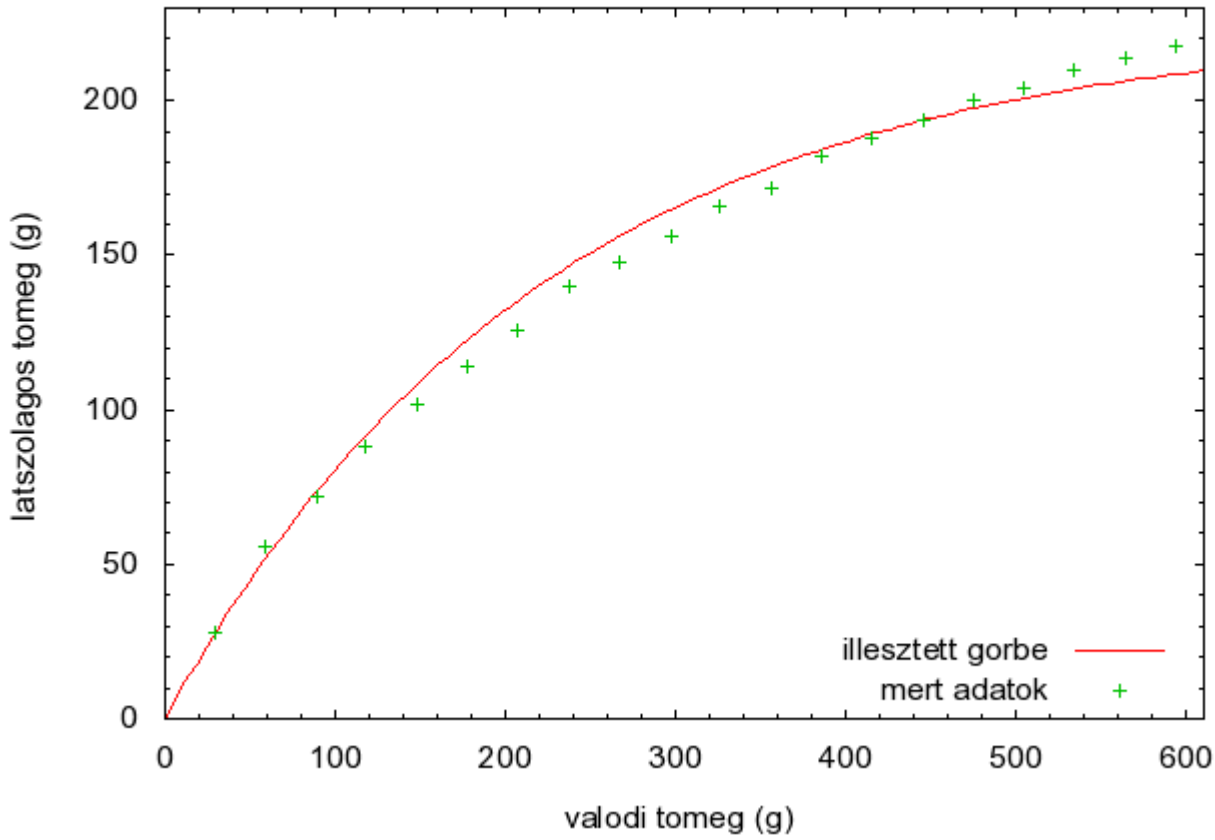
	„A” anyag				„B” anyag			
n	m(g)	m_l(g)(1.)	m_l(g) (2.)	m_l(g) (3.)	m(g)	m_l(g) (1.)	m_l(g) (2.)	m_l(g) (3.)
1	29,7	30	28	26	25,9	30	24	28
2	59,4	60	56	50	51,8	54	48	52
3	89,1	76	72	62	77,7	62	56	62
4	118,8	92	88	74	103,6	70	66	70
5	148,5	102	102	88	129,5	78	74	78

6	178,2	118	114	104	155,4	86	82	84
7	207,9	126	126	114	181,3	94	90	92
8	237,6	138	140	126	207,2	102	98	102
9	267,3	148	148	136	233,1	108	102	108
10	297	158	156	144	259	112	110	112
11	326,7	164	166	152	284,9	118	116	118
12	356,4	172	172	160	310,8	122	120	124
13	386,1	180	182	168	336,7	128	124	128
14	415,8	186	188	174	362,6	128	130	128
15	445,5	190	194	180	388,5		130	134
16	475,2	198	200	184	414,4		134	134
17	504,9	206	204	190	440,3		138	140
18	534,6	208	210	194	466,2		140	140
19	564,3	216	214	198	492,1		140	144
20	594	220	208	204	518		146	144

A mérési pontok és a rájuk illesztett görbék az alábbi 6 ábrán találhatóak:

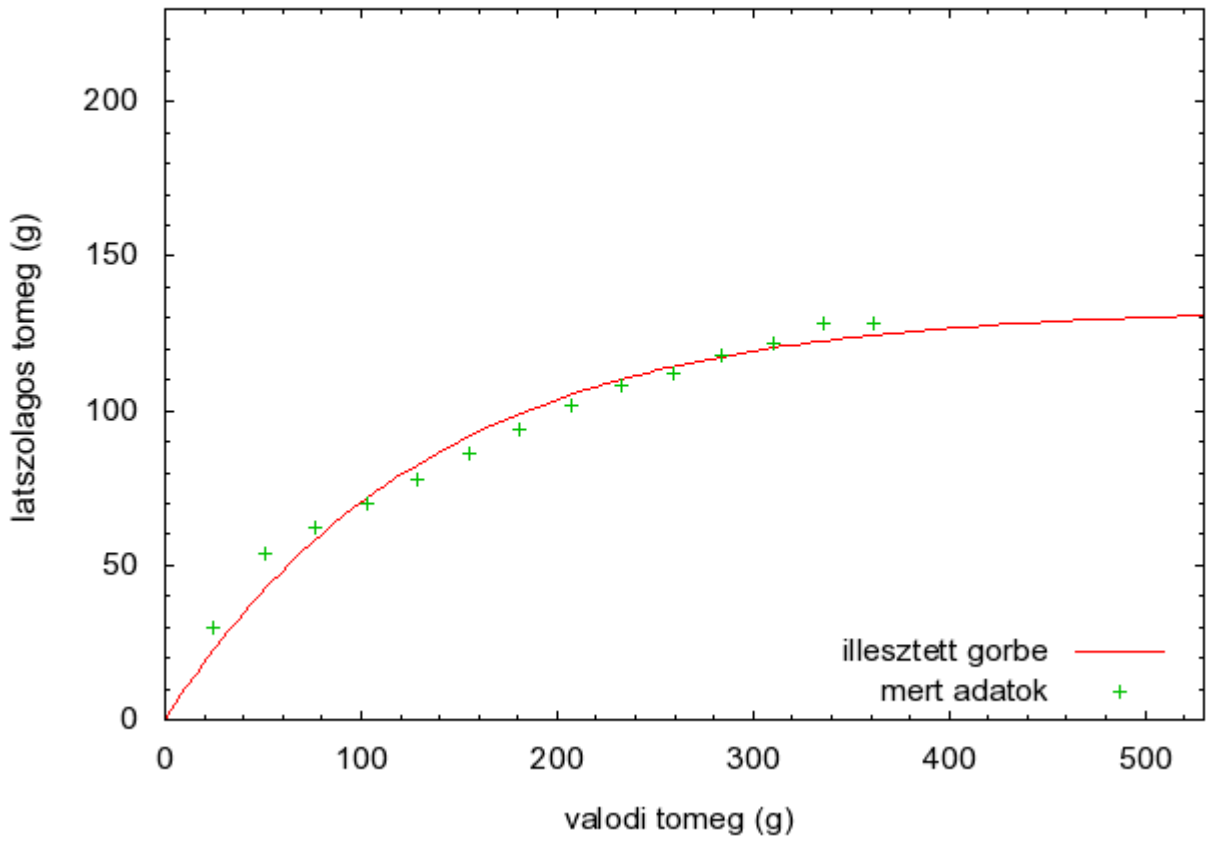

'A' anyag 1. meres
latszolagos tomeg (g)
valodi tomeg (g)
0
50
100
150
200
0
100
200
300
400
500
600
illesztett gorbe
mert adatok

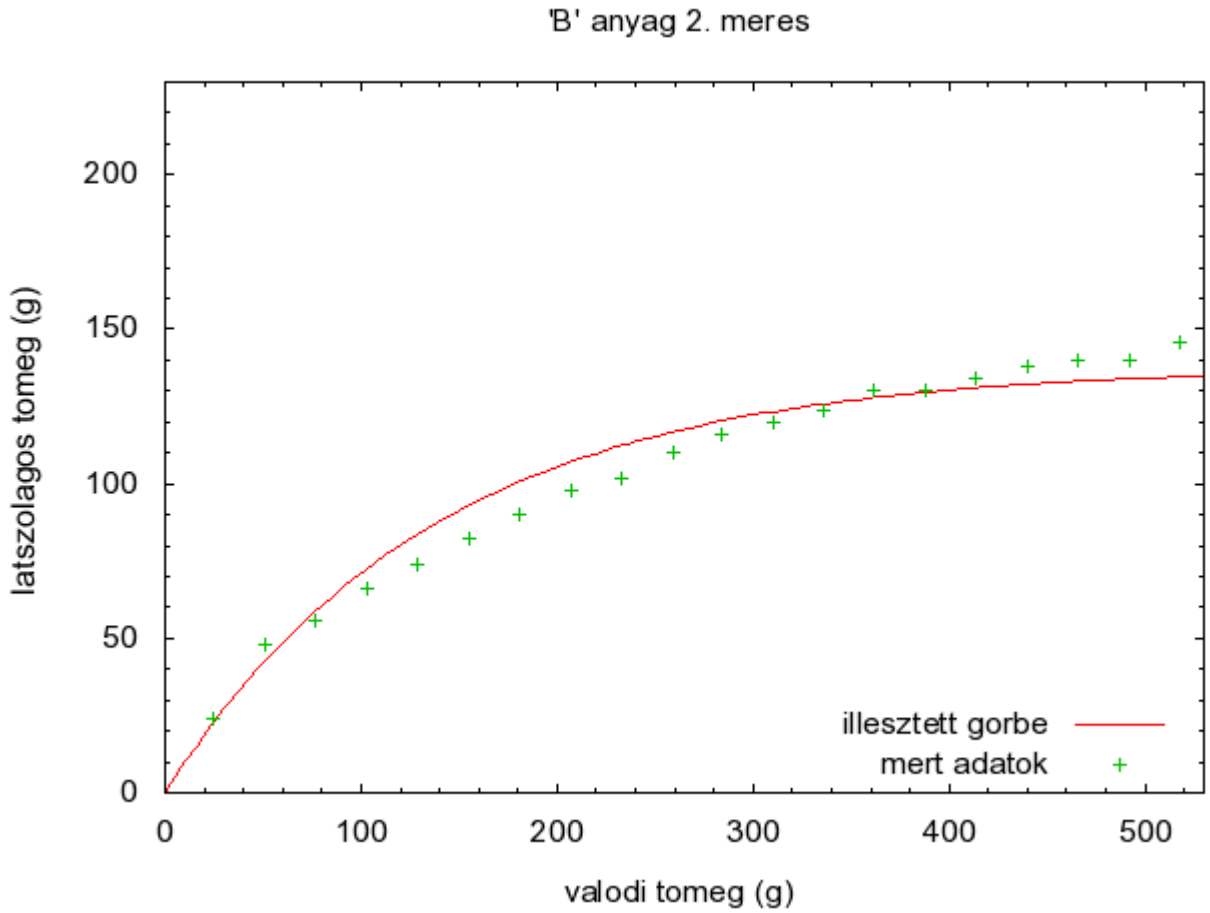
'A' anyag 2. meres

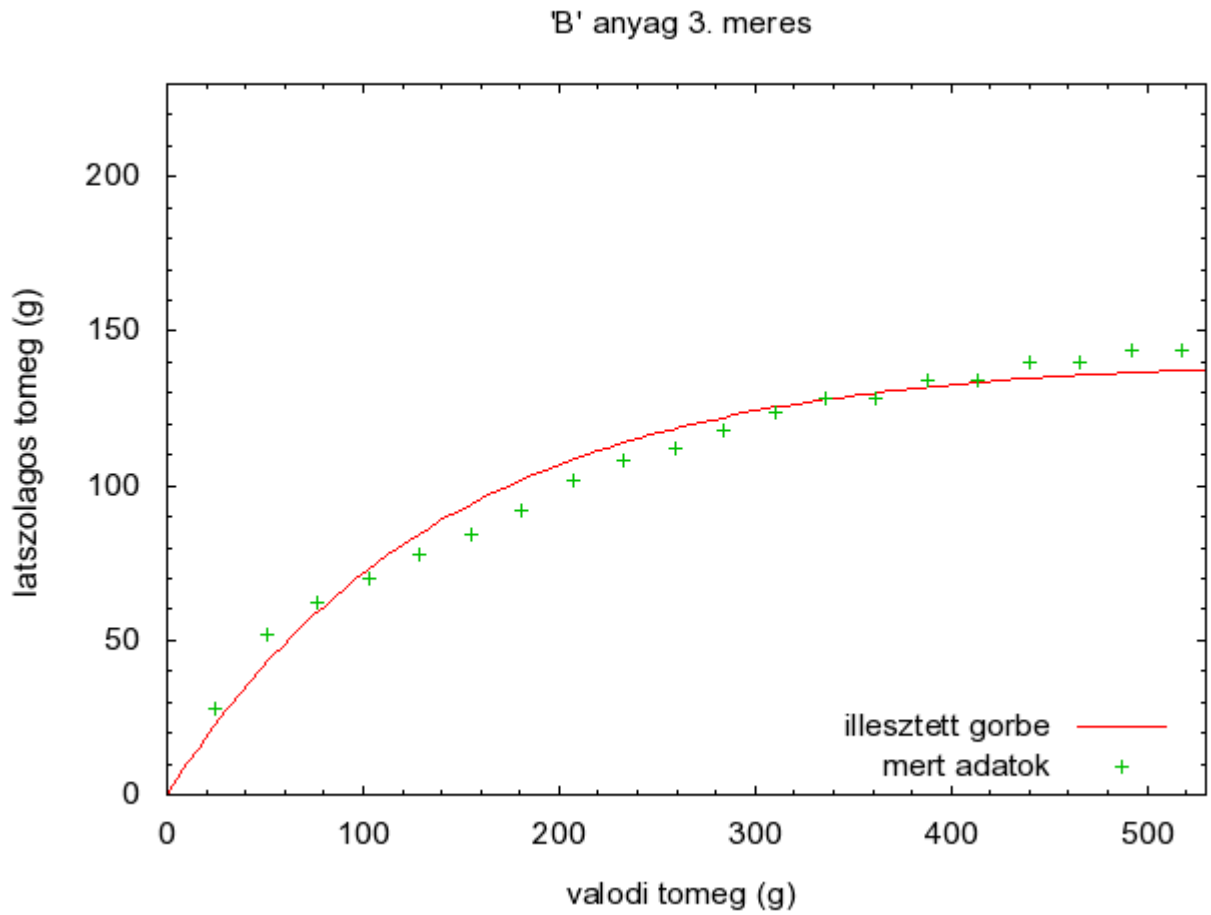


'A' anyag 3. meres

'B' anyag 1. meres




'B' anyag 2. meres
latszolagos tomeg (g)
valodi tomeg (g)
0
50
100
150
200
0
100
200
300
400
500
illesztett gorbe
mert adatok


'B' anyag 3. meres
latszolagos tomeg (g)
valodi tomeg (g)
0
50
100
150
200
0
100
200
300
400
500
illesztett gorbe
mert adatok

Az illesztett görbékhez tartozó m_∞ paraméterek:

	„A” anyag	„B” anyag
1. mérés	224,1 ± 3,2 g	133,3 ± 2,9 g
2. mérés	224,6 ± 3,0 g	137,9 ± 2,6 g
3. mérés	199,2 ± 4,5 g	140,9 ± 2,2 g

Látszik, hogy az illeszkedés egyik mérésnél sem pontos, ez attól lehet, hogy az elméleti illesztett függvény nem illeszkedik pontosan a valósághoz. Továbbá az is látszik, hogy egy anyag két különböző mérésénél is kaphatunk jelentősen eltérő eredményeket.

A Jenssen-együttható kiszámításához szükség van az anyagok sűrűségére is. Így szükség van a hengerben lévő anyag tömegére illetve a henger térfogatára. A szükséges adatok az alábbi táblázatban szerepelnek:

	A/1 mérés	A/2 mérés	A/3 mérés	B/2 mérés	B/3 mérés
magasság	58 ± 0,5 cm	58,5 ± 0,5 cm	58 ± 0,5 cm	54± 0,5 cm	55,5 ± 0,5 cm
tömeg	594 g	594 g	594 g	518 g	518 g
A henger átmérője:			d =4,7 cm		

$\rho = m/V = m/[(d/2)^2\pi h]$ alapján kiszámolható a sűrűség:

$\rho_A = 588{,}6 \pm 5{,}1\ kg/m^3$

$\rho_B = 545 \pm 5{,}0\ kg/m^3$

Itt a tömegmérés hibáját elhanyagoltam a hosszúságméréséhez képest.

Továbbá szükség volt még a súrlódási együttható meghatározásához is, ehhez egy előre elkészített téglatestet használtunk, aminek 2 oldalára fel volt ragasztva a két

-féle anyag, és azt egy üveglapra helyezve megmértük, hogy mekkora szögnél kezd el csúszni a téglatest. Ez alapján $\mu_A = 0{,}22$ és $\mu_B = 0{,}31$.

A Jenssen-együttható megadásához a $\lambda = R/(2\mu K)$ illetve a $\lambda = m_\infty/(\rho A)$ képletre van szükség. Ezekből $K = R\rho A/(2\mu m_\infty) = R^3\rho\pi/(2\mu m_\infty)$.

A Jenssen-együttható értéke a különböző mérésekben az alábbi táblázatban látható:

	„A” anyag	„B” anyag
1. mérés	0,243 ± 0,009	0,269 ± 0,009
2. mérés	0,243 ± 0,009	0,260 ± 0,009
3. mérés	0,274 ± 0,009	0,254 ± 0,009

A hibákat a sűrűségmérés illetve az illesztés hibájából számoltam.

A három értéket átlagolva megkapom a két anyag Jenssen-együtthatóját:

$K_A = 0{,}253 \pm 0{,}009$

$K_B = 0{,}261 \pm 0{,}009$

2. Mikroszkópikus erőeloszlás vizsgálata

A mérés ezen részében az erőláncokkal foglalkozunk.

2.1. Elméleti háttér, a q-modell

A modell alapfeltevése az, hogy az erőláncok kialakításában egy kiszemelt szemcsere felülről ható erők nem egyenletesen oszlanak meg az őt tartó szemcsék között. Tekintsünk egy szabályos rácsot, melynek minden rács pontjaiban egy egységnyi tömegű részecske található. Minden részecske az alatta levő rétegben megtalálható N részecskén nyugszik. Egy adott
szemcsére ható összes súlyerő ennek az N részecskének továbbítódik véletlenszerű megoszlásban: az i-edik részecske által a j-edik részecskének továbbított erőt jelölje a qij véletlen változó. Hasonlóan tart a részecske N felette levő másikat, az i-edik által megtartott súlynak w(M, i), a következő sztochasztikus egyenletet kell kielégítenie:

$$w(M, j) = 1 + \sum q_{ij}(M-1) w(M-1, i)$$

A modell keretein belül figyelmen kívül hagyjuk a qij térbeli korrelációit és feltesszük, hogy mindenütt azonos eloszlást követnek. Ez a feltevés az átlagtér közelítésnek felel meg. Azt mondhatjuk tehát, hogy a qij változóknak eleget kell tenniük a:

$$\sum_{j=1}^{N} q_{ij} = 1$$

kényszerfeltételnek. A legegyszerűbb választás az, amikor a minden qij készlet valószínűsége ugyanaz. Megmutatható, hogy ekkor az egy szemcse által megtartott redukált súly, v = w/M eloszlásfüggvénye M → ∞ határesetben, egy adott eloszláshoz

tart:

$$P_{egyenletes}(v)=\frac{N^N}{(N-1)}!\,n^{N-1}e^{-Nv}$$

Az is megmutatható, hogy ha qij -k eloszlására más feltevést teszünk, átlagtérközelítésben, akkor is hasonló eredményre jutunk, nagy v-k eseten:

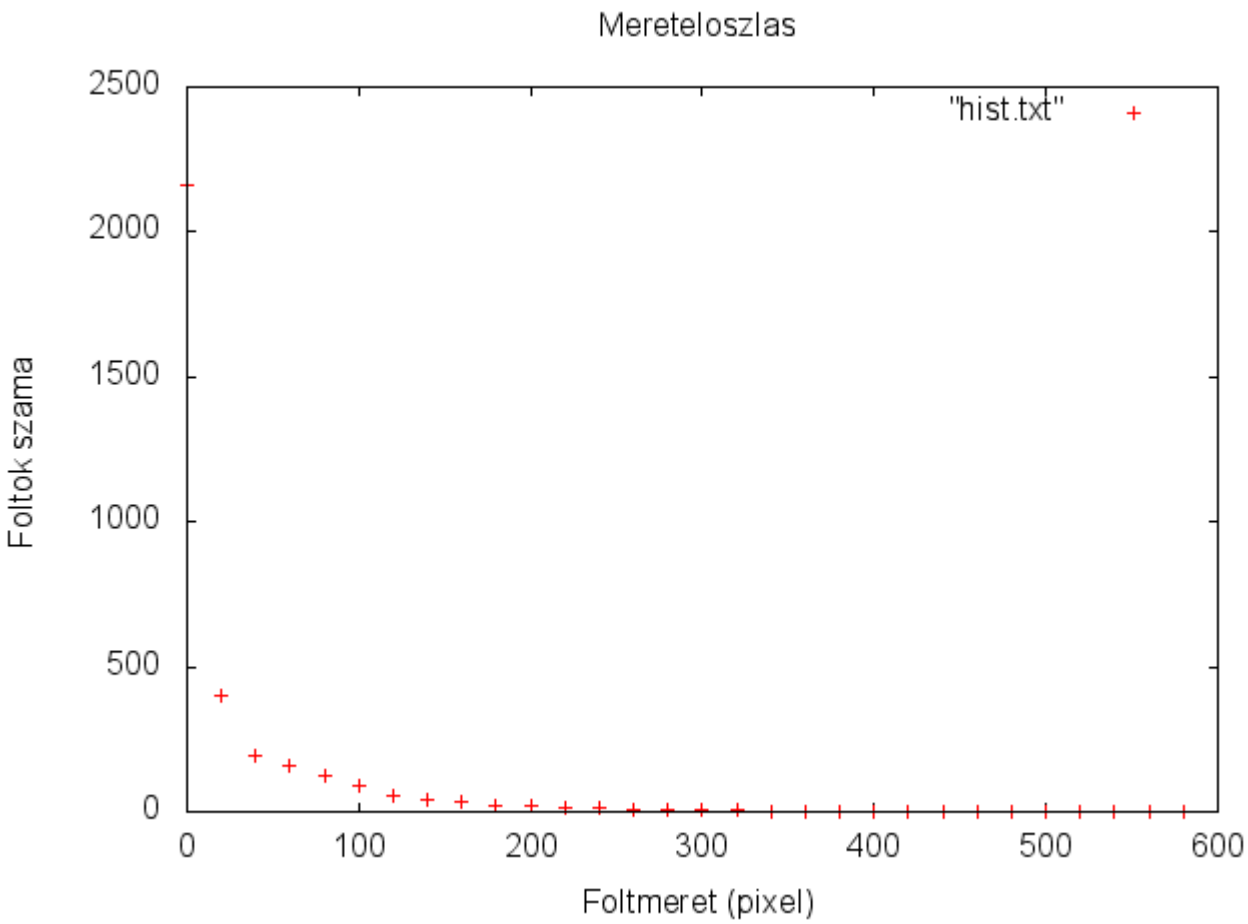
$$P(v)\simeq v^{N-1}e^{-av}\quad ,$$

ahol *a* konstans. Azt kaptuk tehát, hogy a szemcséken merhető erők eloszlása exponenciálisan cseng le. Ez jóval lassabb, mint a Gauss-tipúsú e−x2, vagyis ez azt jelenti, hogy az átlagos erőnél lényegesen nagyobb erők súlya meglepően nagy. Ezt az eredményt ellenőriztük a mérés során.

2.2. A mérés menete és kiértékelése

Egy henger alakú tartó aljára egy kartonlapon fekvő indigót erősítettünk. A tartóba szabályos üveggolyókból álló szemcsés anyagot töltöttünk, amelyre egy dugattyút helyeztünk és egyikünk ráállt. Az erő a szemcsés anyagban az erőláncokon keresztül továbbítódik a falnak és az edény aljának. Az edény alján levő szemcsék nekinyomódnak az indigónak és a rajuk ható erővel aranyos foltot hagynak a papíron. Ezáltal a papíron levő foltok méreteloszlásából következtetni tudunk az erőeloszlásra. A kísérlet elvégzése során ügyelnünk kell, hogy a golyók beöntéskor ne hagyjanak nyomot a papíron. Összesen öt lenyomatot készítettünk. Ezeket a megadott képfeldolgozó laborprogramok, illetve a GIMP segítségével értékeltük ki. A dobozméret 20, a háttér 220 volt.

Az egyesített eloszlás a következő oldalon látható:



Láthatóan exponenciális függvényt kaptunk, vagyis a méreteloszlásra jó becslést adott a q modell.