Hangfrekvenciás mechanikai rezgések vizsgálata

Rudolf Ádám

A mérés dátuma:
2009.11.12.

1. A mérés laírása

Az ablakhoz közelebbi mérőhelyen mértem. A mérés során két minta rezgéseit vizsgáltam dinamikus módszerekkel. Ezek azért jobbak a statikusnál, mert a mérési hibát okozó külső zavarok kiküszöbölhetőek, valamint a minta nem deformálódik maradandóan.

Két minta rezgéseit vizsgáltam: állandó hossz mellett különböző módusait mértem meg a B jelű, megvastagított végű mintának, és a frekvencia hosszfüggését a *13*-as jelű mintának.

Először a megvastagodott végű minta zérusmódusát, és első három felharmonikusának frekvenciáját határoztam meg. Ezután a frekvencia zérusmódus közeli kis változtatásaival kimértem a rezonanciagörbét. Ezután a téglatest alakú minta zérusmódusának frekvenciáját mértem meg több különböző mintahossz mellett.

2. A mérés elmélete

A rúd rezgése szétbontható egy csak hely-, és egy csak időfüggő részre. Az amplitúdó helyfüggését nem vizsgáljuk, csak a különböző harmonikusok frekvenciáit, így minket az időfüggő rész érdekel. A kitérés az i-edik felharmonikus esetén:

$$A_i = \frac{A_{i0}}{\sqrt{(\omega_{i0}^2 - \omega^2)^2 + 4\kappa_i^2\omega^2}} \tag{1}$$

, ahol A_{i0} a gerjesztés nagyságától függő amplitúdó-állandó, κ_i a súrlódást leíró csillapítási tényező, ω_{i0} pedig az i-edik módus sajátkörfrekvenciája, amely az

$$\omega_{i0} = \frac{k_i^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho q}} \tag{2}$$

formulával számolható. Ebben k_i az i-edik módushoz tartozó állandó, E a rúd hosszirányú Young-modulusa, ρ a minta sűrűsége, q pedig a keresztmeszete, I pedig a másodrendű felületi nyomatéka, esetünkben:

$$I = \frac{1}{12}ba^3$$

, ahol b az alap hossza, a pedig a magasság. A sajátkörfrekvenciát megadó összefüggésből következik, hogy egy minta i-edik módusának sajátfrekvenciáját megkaphatjuk az alapharmonikusból:

$$\frac{\nu_{0i}}{\nu_{00}} = \left(\frac{k_i}{k_0}\right)^2 \tag{3}$$

3. Mérési összeállítás

A rudat egy elektromágnessel hozzuk rezgésbe, amire a sinusjelet egy függvénygenerátor szolgáltatja. A frekvencia finom állításával egy mérőműszer segítségével megkeressük az amplitúdó maximumát. A rúd kitérését egy lemezjátszóból kiszerelt pickup méri. Amikor megtaláltuk a maximumot, akkor egy pontos frekvenciamérővel megnézzük az aktuális frekvenciát.
Ha a gerjesztés frekvenciája ωg, akkor a rúdra

$$F(t) \approx \alpha \cos(\omega g t) + \beta \sin(2\omega g t)$$

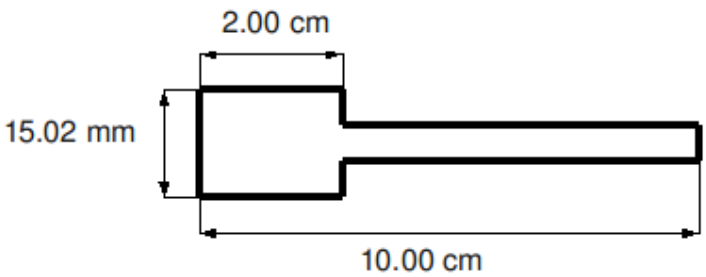
alakú gerjesztőerő hat. Az első tag az örvényáramok és a gerjesztő elektromágnes alatt található állandó mágnes kölcsönhatásából adódik és ωg frekvenciájú erőt gyakorol a mintára. A második tag az örvényáramok és a változó mágneses tér közötti kölcsönhatásból származik és $2\omega g$ frekvenciájú. Tehát minden sajátmódus kétféle frekvenciával gerjeszthető, az egyik az $\omega g = \omega_{0i}$ egyenletnek tesz eleget, a másik pedig ennek a fele. Az amplitúdót mérve a gerjesztőfrekvencia függvényében megkapjuk a rezonanciagörbét. A görbe $\Delta\nu$ félértékszélessége kifejezhető a κ csillapítási tényezővel:

$$\delta\nu = \frac{\kappa}{\pi} \tag{4}$$

4. A mérés kivitelezése

4.1. A minták geometriai adatai

4.1.1. A vastag végű (B) minta adatai



1. ábra. A *asd* adatai

A minta vastagságát, és szélességét öt helyen mértem meg. Az adatokat a köv. táblázat tartalmazza:

Mérés:	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**Átlag**
a (mm)	2,01	2,02	3,03	2,02	2,02	$2,22 \pm 0,21$
a (mm)	14,99	15,07	15,06	15,06	15,06	$15,05 \pm 0,06$

1. táblázat. A vastag végű (B) minta adatai

A továbbiakban az átlaggal fogok számolni, a hibának pedig az átlagtól való legnagyobb eltérést vettem. Egyszerű geometriával számolható: $V_B = (4,58 \pm 0,011) \cdot 10^{-6} m^3$. Tömege: $m_1 = (14,6557 \pm 0,00005) g$.

4.1.2. A téglatest (*13*) minta adatai

A minta tömege $m_2 = (38,5100 \pm 0,00005) g$, hossza: $l_2 = (10,05 \pm 0,005) cm$, vastagsága hasonlóképpen:

Mérés:	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**Átlag**
a (mm)	3,04	3,035	3,035	3,035	3,055	3,04 ± 0,005
b (mm)	15,00	15,00	15,00	15,01	14,95	14,99 ± 0,04

2. táblázat. A téglatest (*13*) minta adatai

$V_{13} = (7,19 \pm 0,012) \cdot 10^{-6} m^3$

4.2. A B jelű minta sajátrezgései

Először a B minta első négy sajátfrekvenciáját mértem mindkét lehetséges gerjesztő frekvenciánál. A mérési adatok a 3. táblázatban láthatók. Jól látható, hogy az ugyanazon módushoz tartozó párosával előforduló gerjesztési frekvenciák valóban egy 2-es faktorban különböznek. Továbbá leolvashatjuk, hogy a (3) elméleti összefüggés is kis hibával teljesül.

$\nu_{i0}(Hz)$	i	ν_{i0}/ν_{00}	(k_i/k_0)	**Eltérés(%)**
127,69	0	1/2		
255,76	0	1	1	
803,71	1			
1608,9	1	6,291	6,267	0,38
2266,3	2			
4533,6	2	17,726	17,547	1,01
3862,6	3			
7725,4	3	30,206	34,386	13,8

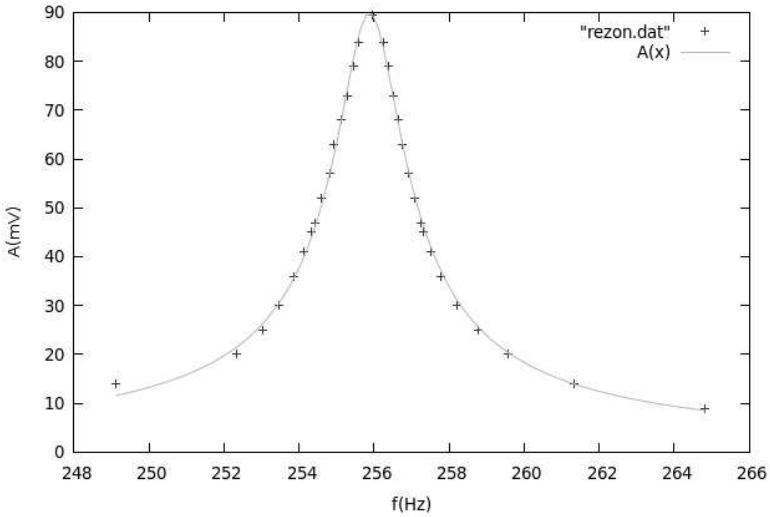
3. táblázat. A B jelű minta sajátfrekvenciái

4.3. A rezonanciagörbe kimérése

A B jelű minta rezgéseinek amplitúdóját az alapharmónikus közeli frekvenciákon kimértem. A kapott görbét hívják rezonanciagörbének. A mért adatokat a 4. táblázat, és a 2. ábra tartalmazza.

$\nu(Hz)$	$A(mV)$	$\nu(Hz)$	$A(mV)$	$\nu(Hz)$	$A(mV)$
249,13	14	255,12	68	257,07	52
252,33	20	255,28	73	257,25	47
253,02	25	255,46	79	257,32	45
253,46	30	255,60	84	257,51	41
253,87	36	255,96	80	257,79	36
254,13	41	256,25	84	258,20	30
154,32	15	256,39	79	258,79	25
154,42	47	256,53	73	259,56	20
154,60	52	256,65	68	261,34	14
254,83	57	256,76	63	264,83	9
254,94	63	256,93	57		

4. táblázat. A B jelű minta rezonanciagörbéjének mért értékei



2. ábra. A B minta rezonanciagörbéje

Az ábra egy *gnuplot*-tal illesztett görbét is tartalmaz, amink egyenlete:

$$A_i = \frac{A_{i0}}{\sqrt{(\nu_{i0}^2 - \nu^2)^2 + 4\kappa_i^2\nu^2}} \tag{5}$$

Illesztett paraméterek:

- $f_0 = (255.884 \pm 0.0083)Hz$

Tudjuk, hogy $\kappa = \Delta\nu\pi$. κ. $A_{max}/sqrt2$ helyen a görbe két értékét ki kell vonni egymásból. $\Delta\nu = (1.75 \pm 0.05)Hz$.

$$\kappa = \Delta\nu\pi = (5.4 \pm 0.16)Hz$$

4.4. Young-modulusz meghatározása

A minta Young-moduluszára a következő képlet adódik:

$$E = \frac{4\pi^2 \cdot f_i^2 \cdot l^4 \cdot ab \cdot \rho}{k_i^2 \cdot I} = \frac{48\pi^2 \cdot f_i^2 \cdot l^4 \cdot m}{k_i^2 \cdot a^2 \cdot V} = 36513070Pa$$

$$\Delta E = \left(2\frac{\Delta\nu}{\nu} + 4\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta V}{V}\right) \cdot E = 6900000Pa$$

Összefoglalva:

$$E = (3.6 \pm 0.69) \cdot 10^7 Pa$$

4.5. Alapharmonikus frekvenciájának hosszfüggése

Ezen mérés során a *13*-as számú minta rezgéseit vizsgáltam. Mivel ennek nincs megvastagítva a vége, a satuszerű befogószerkezetbe különbözőképpen rögzítve több mintahosszal is dolgozhatunk. 4-8 cm-es tartományban cm-enként megkerestem az alapharmonikus frekvenciáját. A mérési eredményeket az 5. táblázat tatalmazza.

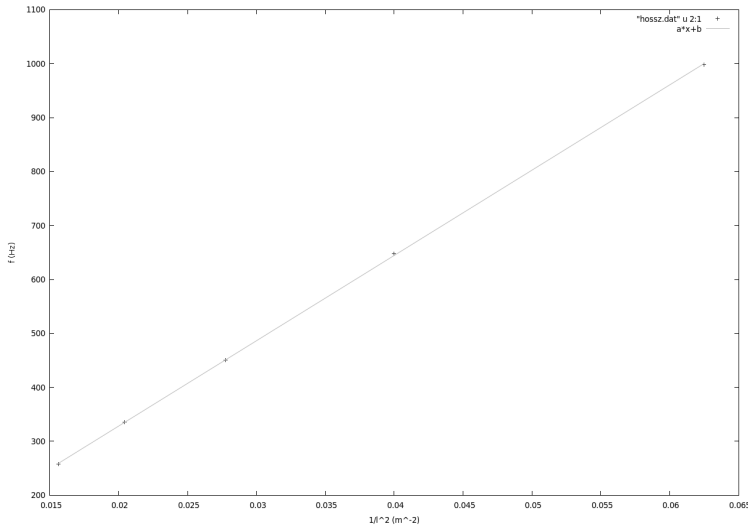
$l(cm)$	$\nu_0(Hz)$
8	257,33
7	335,33
6	450,93
5	648,15
4	998,37

5. táblázat. A *13* jelű minta alapfrekvenciái a hossz függvényében

Az elmélet szerint:

$$\nu = \frac{1}{l^2}\frac{k_i^2}{2\pi}\sqrt{\frac{EI}{\rho q}}$$

Vagyis a $\nu(1/l^2)$ pontokra jól kell illeszkednie egy egyenesnek. Ezen pontokat kiszámoltam, ábrázoltam, és $\alpha \cdot x + \beta$ egyenletű egyenest illesztettem rájuk. A pontok, és az illesztett egyenes a 3. ábrán látható:



3. ábra. A *13*-as minta rezgései a hossz függvényében

$\alpha = (15800 \pm 70) Hz/cm^2$
A képlet átalakításával, és a hibaszámolással együtt:

$$E = \frac{4\pi^2}{k_i^4}\frac{\rho q}{I}\alpha^2 = \frac{48\pi^2 \cdot m \cdot \alpha^2}{k_i^2 \cdot V \cdot a^2} = (3,1 \pm 0,57) \cdot 10^6 Pa$$