Rugalmas állandók mérése

2. mérés

Rudolf Ádám

Mérés időpontja:
2009. november 5.
Csütörtök délelőtt
Ablaktól távolabbi mérőhely

1. A mérés célja és elve

A mérés célja többféle anyagú és formájú testek rugalmas állandóinak megmérése (Young-modulusz, valamint torziómodulusz).

A Young-modulusz mérésének elve:

Egy rudat két végén támasztunk, és középen adott erővel terheljük. Ekkor a rúd lehajlása középen:

$$s = \frac{1}{48}\frac{l^3}{EI}F ,$$

ahol s a rúd lehajlása, l a támasztási pontok távolsága, E a Young-modulusza, F a rúdra ható terhelő erő, I pedig a keresztmetszet másodrendű nyomatéka, melynek definíciója:

$$I = \int_f z^2 df .$$

Ezt az integrált a rúd keresztmetszetére kell elvégezni. Mi kör, valamint téglalap keresztmetszetű rudakat vizsgálunk, ezekre I értéke:

$$I_{kör} = \frac{\pi}{4}R^4 , \text{ és } I_{téglalap} = \frac{ab^3}{12} ,$$

ahol R a kör keresztmetszetű rúd sugara, téglalap keresztmetszetű rúd esetén a a téglalap szélessége, b a magassága (vastagabb irányba nehezebb hajlítani).

A leírtak csak kicsi ($s \leq l/200$) behajlásoknál igaz.

Torziómodulusz mérésének elve:

A torziómoduluszt egy torziós ingával végezzük, melynek G torziómodulusza:

$$G = K\frac{\theta}{T^2} ,$$

ahol T a lengésidő, θ a lengő rendszer tehetetlenségi nyomatéka, K pedig a szál geometriai paramétereit (l hossz, és r sugár) magába foglaló állandó:

$$K = \frac{8\pi l}{r^4} .$$

2. Mérési összeállítás

A Young-moduluszt egy speciális kétkarú emelővel mérjük. A rúd támasztását két állítható távolságú ék végzi. A távolság leolvasását egy rögzített skála segíti. Az emelő egyik karjára súlyokat akaszthatunk, a másik karja pedig a rúd közepét terheli. A súlyok ismert tömegűek, és a különböző alátámasztási pontokhoz az erőkar függvényében szorzók tartoznak. Ezek segítségével kiszámítható az effektív terhelés. A terhelő ékkel szemközt egy letapogató ék van, egy kis órához kapcsolva, ami precízen méri a behajlás értékét.

A torziómodulusz méréséhez torziós ingát használunk, ami egy terhelhető keret egy szálra akasztva. A keretben centiméteres közökkel lyukak vannak, ahová súlyokat helyezhetünk, változtatva ezzel a lengő rendszer tehetetlenségi nyomatékát. A lengésidőt egy fénykapuhoz kötött elektronikus mérőórával mérjük, mellyel *10* lengésidőt mérünk ezred másodperc pontossággal.

A minták (*2* rúd, a tárcsasúlyok és a torziós szál) geometriai adatait csavarmikrométerrel, tolómérővel, és mérőszalaggal mértük le. A torziós ingánál használt súlyok tömegét elektromos analitikus mérleggel mértük le.

3. Mérés kivitelezése, és az adatok kiértékelése

<u>Young-modulusz mérése:</u>

A mérés során az *A2* henger alakú, valamint a *V1* téglalap keresztmetszetű rudat vizsgáltam.

Csavarmikrométerrel megmértem az *A2* rúd keresztmetszetének átmérőjét (*d*), valamint a téglalap alakú rúd rövidebb (*a*), és hosszabb (*b*) oldalát. Minden mérést ötször végeztem el, és számolásaimban az öt adat átlagát fogom használni. Az adatok hibájának (Δ) az átlagtól való legnagyobb eltérést vettem. A mért, és számolt adatok a következő táblázatban találhatók:

	1. mérés	2. mérés	3. mérés	4. mérés	5. mérés	Átlag	Δ
d (mm)	10.060	10.055	10.050	10.055	10.055	10.055	0.005
a (mm)	7.090	7.070	7.065	7.070	7.070	7.073	0.017
b (mm)	12.440	12.435	12.435	12.430	12.430	12.434	0.006

A mérés két részből állt. A rúd behajlását megmértem egyrészt állandó hossz (ami a relatív hiba csökkentése érdekében minél nagyobb), és többféle terhelés mellett, ezzel igazolva a terhelés és behajlás közti lineáris kapcsolatot, valamint meghatározott terhelés mellett, és változó hossz függvényében.

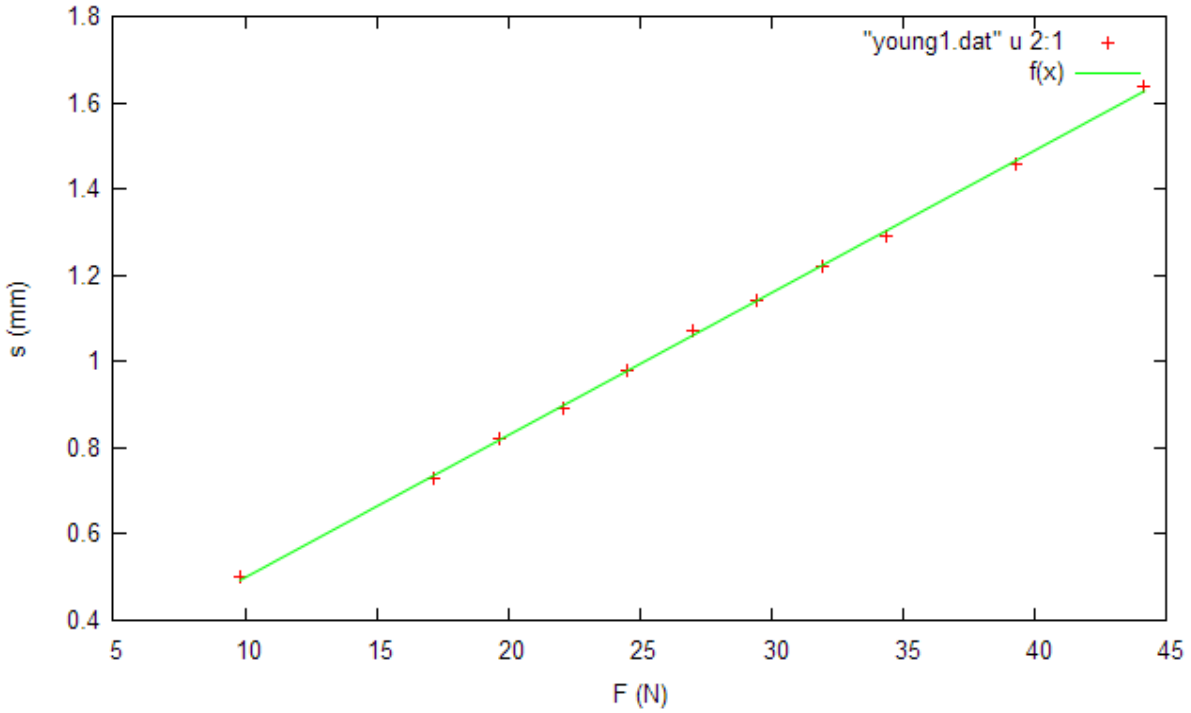
A terhelésfüggő esetben a támasztási ékek távolsága mindig $l = 38\ cm$.

3.1 Az *A2* hengeres rúd Young-moduluszának meghatározása

Az első eset (terhelésfüggés) mérési adatait (*m* effektív tömeg, *s* behajlás, valamint az effektív tömegből számolt *F* erő) tartalmazza a következő oldalon lévő táblázat az *A2* (hengeres) rúd esetében ($g = 9.81\ m/s^2$-tel számoltam):

m (g)	s (mm)	F (N)
1000	0.50	9.810
1750	0.73	17.168
2000	0.82	19.620
2250	0.89	22.073
2500	0.98	24.525
2750	1.07	26.978
3000	1.14	29.430
3250	1.22	31.883
3500	1.29	34.335
4000	1.46	39.240
4500	1.64	44.145

Az *s* adatokat ábrázoltam *F* függvényében, és az adatokra $a_1F + b_1$ egyenletű egyenest illesztettem a *gnuplot* nevű programmal. Az adatok, és az illesztett egyenes grafikonja:



A program által illesztett paraméterek közül számunkra csak az egyenes meredeksége érdekes, a tengelymetszete nem.

$$a_1 = (0.0330 \pm 0.00026)10^{-3}\ m/N$$

Tudjuk, hogy ez esetben igazak a következők:

$$a_1 = \frac{1}{48}\frac{l^3}{E_1 I_{kör}}$$

$$I_{kör} = \frac{\pi}{4}R^4 = 5.018\cdot 10^{-10} m^4, \quad \text{és} \quad \Delta I_{kör} = 4\frac{\Delta R}{R} I = 9.9\cdot 10^{-13} m^4$$

ahol $R = d/2$, és $\Delta R = \Delta d/2$.

$$l^3 = 0.055 m^3, \quad \text{és} \quad \Delta\left(l^3\right) = 3\frac{\Delta l}{l} l^3 = 3\Delta l \cdot l^2 = 4.3\cdot 10^{-4} m^3$$

Δl abszolút hibát *1 mm*-nek vettem (a *mm* skála leolvasási hibájának kétszerese). Tehát:

$$E_1 = \frac{1}{48}\frac{l^3}{a_1 I_{kör}} = \frac{1}{48}\frac{0.055 m^3 N}{5.018\cdot 10^{-10} m^4 \cdot 0.033\cdot 10^{-3} m} = 9.933\cdot 10^9 Pa$$

A Young-modulusz hibája:

$$\Delta E_1 = \left(\frac{\Delta I_{kör}}{I_{kör}} + \frac{\Delta\left(l^3\right)}{l^3} + \frac{\Delta a_1}{a_1}\right) E_1 = 1.8\cdot 10^8 Pa$$

Összefoglalva az *A2* rúd Young-modulusza:

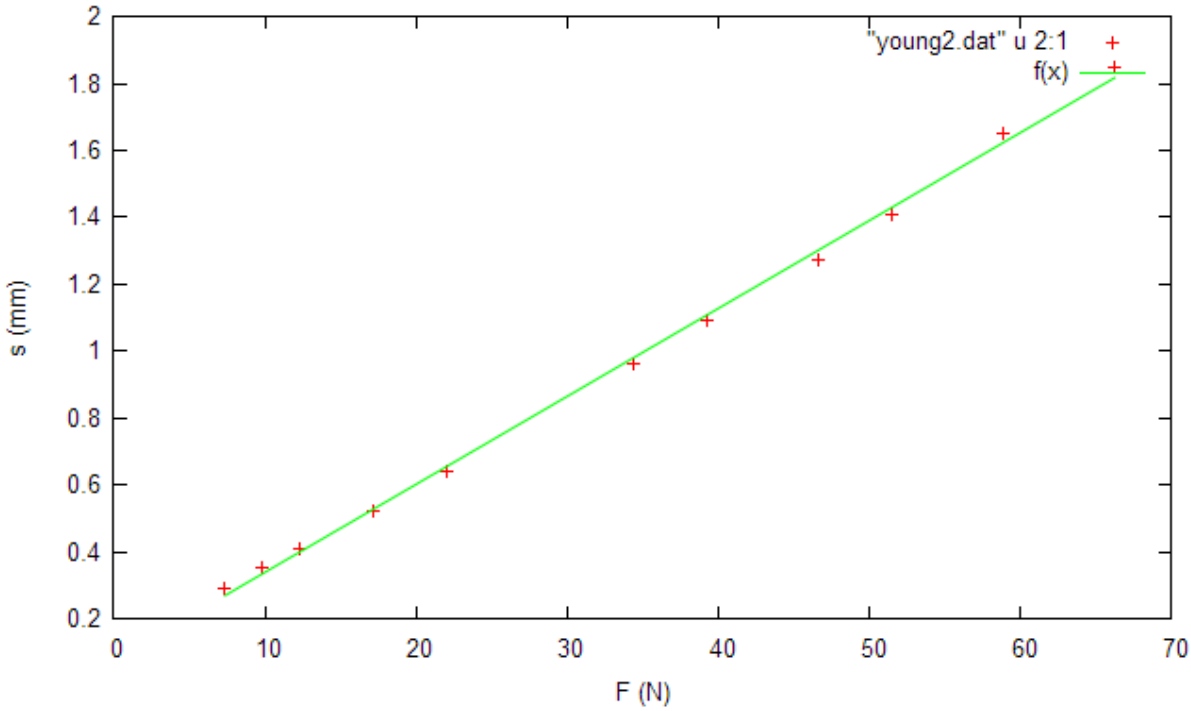
$$E = \left(9.9 \pm 0.18\right)\cdot 10^9 Pa$$

3.2 A *V1* téglalap keresztmetszetű rúd Young-moduluszának kiszámítása

Ez esetben a rúddal kettő, az előzőhöz hasonló menetű mérést végeztem. Az elsőt a rúd egyik, a másodikat a másik oldalával. Mivel a mérés menete, és a Young-modulusz meghatározása majdnem teljesen megegyezik az *A2* rúd esetében leírtakkal, nem fogom részletezni a számolást.

A mért, és számított adatpontok a rövidebbik oldal (*a*) esetén, valamint az *s(F)* függvény az illesztett $a_2F + b_2$ egyenessel a következő oldalon találhatóak.

m (g)	s (mm)	F (N)
750	0.29	7.358
1000	0.35	9.810
1250	0.41	12.263
1750	0.52	17.168
2250	0.64	22.073
3500	0.96	34.335
4000	1.09	39.240
4750	1.27	46.598
5250	1.41	51.503
6000	1.65	58.860
6750	1.85	66.218



$$a_2 = (0.0262 \pm 0.00035)\ 10^{-3}\ m/N$$

Ez esetben

$$I_{téglalapa} = \frac{a^3 b}{12} = \frac{7.073^3 \cdot 12.434 \cdot 10^{-12}}{12} m^4 = 3.666 \cdot 10^{-9} m^4 \text{, és}$$

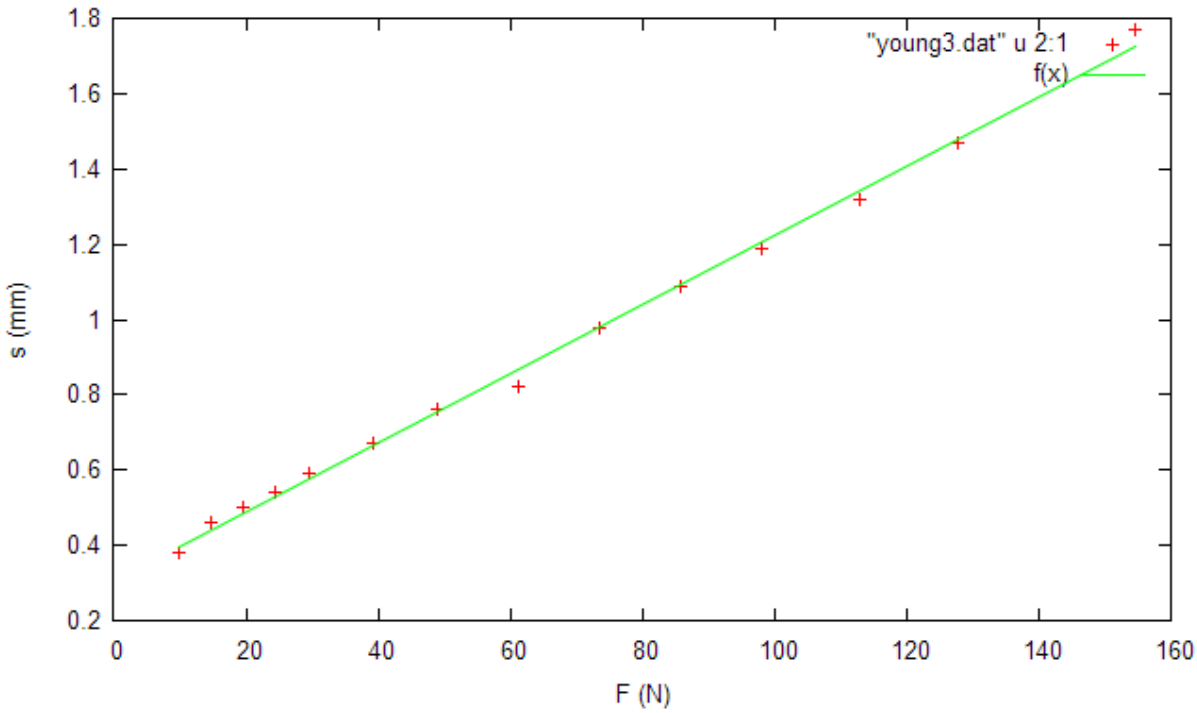
$$\Delta I_{téglalapa} = \left(\frac{\Delta a}{a} + 3\frac{\Delta b}{b} \right) I_{téglalap} = 2.8 \cdot 10^{-12} m^4$$

A fent már leírt képletekkel:

$$E_a = (1.71 \pm 0.049) \cdot 10^{10}\ Pa$$

A hosszabb oldalt (b) terhelve ugyanígy:

m (g)	s (mm)	F (N)
1000	0.38	9.810
1500	0.46	14.715
2000	0.50	19.620
2500	0.54	24.525
3000	0.59	29.430
4000	0.67	39.240
5000	0.76	49.050
6250	0.82	61.313
7500	0.98	73.575
8750	1.09	85.838
10000	1.19	98.100
11500	1.32	112.815
13000	1.47	127.530
15750	1.77	154.508



$a_3 = (0.0091 \pm 0.00013)\ 10^{-3}\ m/N$

Ez esetben

$$I_{téglalapb} = \frac{b^3 a}{12} = \frac{12.434^3 \cdot 7.073 \cdot 10^{-12}}{12} m^4 = 1.133 \cdot 10^{-10} m^4, \text{ és}$$

$$\Delta I_{téglalapb} = \left(3\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right) I_{téglalap} = 9.8 \cdot 10^{-12} m^4$$

A fent már leírt képletekkel:

$$E_b = (1.60 \pm 0.049) \cdot 10^{10}\, Pa$$

Az elmélet alapján:

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{I_{téglalapa}}{I_{téglalapb}}$$

$$\frac{a_3 \cdot I_{téglalapb}}{a_2 \cdot I_{téglalapa}} = \frac{0.0091 \cdot 36.66}{0.0262 \cdot 1.13} = 1.073$$

Az elmélet szerint ennek egynek kell lennie. A fennálló hibaforrások mellett ez jó eredménynek tekinthető.

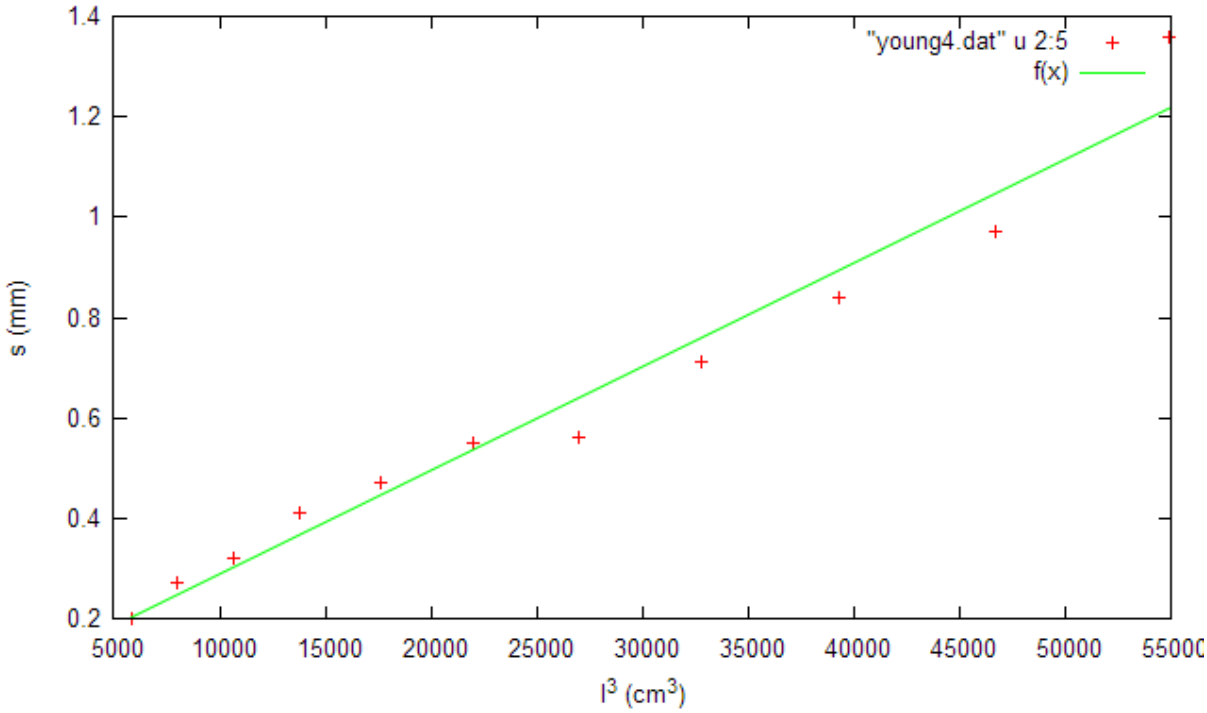
3.3 Behajlás függése a rúd hosszától

A behajlás hosszfüggését a *V1* jelzésű rúddal végeztem, a rövidebbik oldalát terhelve.

l (cm)	l^3 (cm^3)	s1 (mm)	s2 (mm)	s (mm)
38	54872	0.59	1.95	1.36
36	46656	0.44	1.41	0.97
34	39304	0.40	1.24	0.84
32	32768	0.36	1.07	0.71
30	27000	0.41	0.97	0.56
28	21952	0.33	0.88	0.55
26	17576	0.35	0.82	0.47
24	13824	0.31	0.72	0.41
22	10648	0.29	0.61	0.32
20	8000	0.33	0.60	0.27
18	5832	0.30	0.50	0.20

Az s_1 értékek *1000 g*, az s_2 értékek *6000 g* effektív terhelés mellett lettek mérve. Mivel a terhelésre nézve a kihajlás lineáris, ez azt jelenti, hogy *5000 g* terhelés $s_2 - s_1 = s$ kihajlást okoz. Erre a kivonásra azért van szükség, mert a műszer a súrlódás miatt nem tud rendesen visszaállni a nullpontra.

l^3 függvényében ábrázoltam az s kitérést, és az adatpontokra $s = a_4 l^3 + b_4$ egyenletű egyenest illesztettem. Az adatpontok, és az illesztett egyenes grafikonja a következő oldalon látható.



$$a_4 = (0.020 \pm 0.0013)\ 1/m^3$$

$$E_4 = \frac{1}{48}\frac{F}{a_1 I_{téglalapa}} = \frac{1}{48}\frac{5Nm^2}{20\cdot 3.66\cdot 10^{-10} m^4} = 1.42\cdot 10^{10}\,Pa$$

$$\Delta E_4 = \left(\frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta a_4}{a_4} + \frac{\Delta I_{téglalapa}}{I_{téglalapa}}\right)\cdot E_4 = 1.2\cdot 10^9\,Pa$$

ahol $\Delta F/F$-et *1%*-nak vettem. Összefoglalva:

$$E_2 = (1.4 \pm 0.12)\cdot 10^{10}\,Pa$$

3.4 Torziómodulusz mérése

A torziós szál l hosszát mérőszalaggal, d átmérőjét pedig csavarmikrométerrel mértem. $l = 59.5\ cm$ adódott. Az átmérőt tízszer megmértem, és mind a tízszer $d = 0.51\ mm$ adódott.

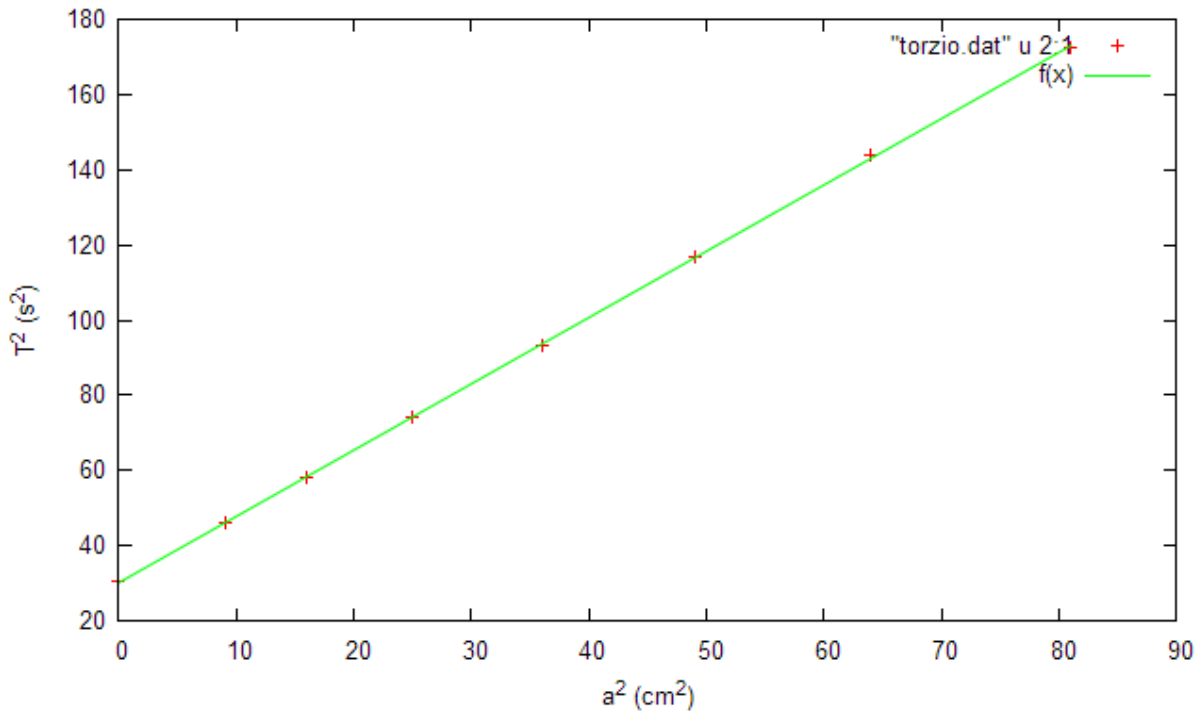
A szál G torziómoduluszára elméleti megfontolások alapján a $G = K\frac{m_1 + m_2}{m}$ képlet adódik, ahol $K = \frac{8\pi l}{r^4}$, m_1 és m_2 a két tárcsa tömege, m pedig a $T^2(a^2)$ adatpontokra illesztett egyenes meredeksége. a egy tárcsa távolsága a forgásponttól, T pedig az ehhez tartozó lengésidő.

m_1 és m_2 értékeket lemértem analitikai mérleggel, és a következőket kaptam: $m_1 = 196.2851\ g$, $m_2 = 196.8440\ g$. (Sorrendben: *6*-os és *7*-es számú tárcsák.)

Ehhez lemértem a torziós inga lengésidejeit minden lehetséges *a* értéknél. A műszer *10* lengésidőt mért. Az *a* értékeket, az ezekhez tartozó *10* lengésidőt, valamint az ezekből számolt a^2 és T^2 értékeket a következő táblázat tartalmazza (T^2 értékekben már *1* lengés ideje szerepel):

a (cm)	10T (s)	T^2	a^2 (cm^2)
0	55.14	30.41	0
3	67.71	45.85	9
4	76.26	58.15	16
5	86.06	74.07	25
6	96.66	93.44	36
7	108.00	116.65	49
8	119.97	143.94	64
9	131.32	172.45	81

T^2 értékeket ábrázoltam a^2 függvényében, és az adatpontokra $ma^2 + b$ egyenletű egyenest illesztettem. A mért adatok, és az illesztett egyenes grafikonja:



Az egyenes meredeksége:

$$m = (1.764 \pm 0.0064)\ 10^4\ s^2/m^2$$

A fenti képlet alapján $K \approx 3.537 \cdot 10^{15} \dfrac{1}{m^3}$.

Ezek alapján:

$$G = 3.537 \cdot 10^{15} \cdot \frac{0.196 + 0.196}{17640} Pa = 7.88 \cdot 10^{10} Pa \,.$$

G mérésének hibája:

$$\Delta G = \left(\frac{\Delta l}{l} + 4\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta m_1 + \Delta m_2}{m_1 + m_2} + \frac{\Delta m}{m} \right) \cdot G$$

A következő értékekkel számoltam: $\Delta l = 0.5\ mm$ (a mérőszalag leolvasási hibája), Δr-t elhanyagoltam, mert *10* mérésre századmilliméter pontossággal megegyező eredményt adott. $\Delta m_1 = \Delta m_2 = 0.0000005\ kg$. Δm a *gnuplot* által megadott abszolút hiba. Az értékeket behelyettesítve az eredmény összefoglalva:

$$G = (7.88 \pm 0.035) \cdot 10^{10} Pa$$

Az illesztett egyenes korrelációs együtthatója: *0.99996017*. Ez nagyon jónak tekinthető, ezzel a Steiner-tételt is igazoltuk.

3.5 Üres inga tehetetlenségi nyomatékának meghatározása

Az üres inga tehetetlenségi nyomatékának meghatározásához előbb ki kell számítanunk az egyes tárcsák tehetetlenségi nyomatékát. A tárcsák átmérőjét megmértem tolómérővel, és ezt kettővel osztva a következő érték adódott mindkét tárcsára: $R = 0.0225\ m$, $\Delta R = 0.000125\ m$. A tömegüket ismerjük, így tehetetlenségi nyomatékuk:

$$\theta_i = \frac{1}{2} m_i R^2$$

A következő értékek adódtak: $\theta_1 = 4.96 \cdot 10^{-5} kgm^2$, és $\theta_2 = 4.98 \cdot 10^{-5} kgm^2$. Ha $b = (30.1 \pm 0.28)\ s^2$ a fent illesztett egyenes tengelymetszete, és θ_0 az üres keret tehetetlenségi nyomatéka, akkor:

$$\theta_0 = \frac{Gb}{K} - \theta_1 - \theta_2 = 5.72 \cdot 10^{-4} kgm^2$$

$$\Delta\theta_0 = \left(\frac{\Delta G}{G} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta K}{K}\right)\frac{Gb}{K} + \left(2\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta m_1}{m_1}\right) + \left(2\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta m_2}{m_2}\right) = 0.085 \cdot 10^{-4}\, kgm^2$$

4. Eredmények összefoglalása

Az *A2* jelzésű, hengeres rúd Young-modulusza:

$$E = (9.9 \pm 0.18) \cdot 10^9\, Pa$$

A *V1* jelzésű, téglalap keresztmetszetű rúd vékonyabb oldalhosszával kiszámolt Young-modulusza:

$$E_a = (1.71 \pm 0.049) \cdot 10^{10}\, Pa$$

Ugyanez a vastagabb oldallal:

$$E_b = (1.60 \pm 0.049) \cdot 10^{10}\, Pa$$

A vékonyabb oldalon mért törésmutató a hossz változtatásával kimérve:

$$E_2 = (1.4 \pm 0.12) \cdot 10^{10}\, Pa$$

A vékony torziós szál torziómodulusza:

$$G = (7.88 \pm 0.035) \cdot 10^{10}\, Pa$$

A torziós inga üres keretének tehetetlenségi nyomatéka:

$$\theta_0 = (5.72 \pm 0.085) \cdot 10^{-4}\, kgm^2$$

Ezenkívül a $\frac{a_3}{a_2} = \frac{I_{téglalapa}}{I_{téglalapb}}$ elméleti összefüggést, és a Steiner-tételt is sikerült kísérletileg igazolni.