# Állóhullám kötélen

**Mérést végezte:** Rudolf Ádám
**Mérőpár:** Lénárd András
**Mérés időpontja:** 2008. november 18. 10:00-12:00
**Jegyzőkönyv leadásának időpontja:** 2008. november 25. 10:00

## A mérés célja

A mérés célja meghatározni egy kötél különböző állóhullám módusaihoz tartozó sajátfrekvenciákat, egy másik kötél esetében meghatározni a hullám terjedési sebességének összefüggését az anyagi minőséggel, valamint igazolni az ezekkel kapcsolatos ismert összefüggéseket.

## Mérőeszközök

A kötél hosszát mérőszalaggal határozzuk meg, a frekvenciákat a szinuszjel-generátor írja ki. A méréshez tartozik egy tömegmérés, ezt analitikai mérleggel végezzük.

## A mérés rövid leírása

Az első mérés alkalmával mérőszalaggal meghatározzuk a vibrátor és a fonálcsiga távolságát. Ezután a két kötél közül a vastagabbik egyik végét rögzítjük a vibrátorhoz, a másik végét pedig átvetjük a fonálcsigán és ráakasztunk egy 90 g-os súlyt.

A szinuszjel-genetáror és a vibrátor segítségével rezgésbe hozzuk a kötelet. A frekvencia változtatásával megkeressük azokat az eseteket, amikor a kötél hossza a félhullámhossz meghatározott egész számú többszöröse. Ha a félhullámhosszok számát $n$-nel jelöljük, akkor megkeressük a 2, 3, 4, 5 és 6 $n$-hez tartozó sajátfrekvenciákat. Mindegyik mérésnél megmérjük, és feljegyezzük, hogy hány Hz-et tudunk változtatni a frekvencián, hogy a rezgés még ne változzon meg. Ez a mérés bizonytalansága.

A második mérés alkalmával egy másik, vékonyabb kötelet használunk. Ez esetben a terjedési sebesség és anyagi minőség összefüggése érdekel minket, ezért csak egy állóhullám módust vizsgálunk, különböző húzósúlyok esetében, és az ezekhez tartozó frekvenciákat jegyezzük fel. Az $n = 3$ módushoz tartozó frekvenciát mérjük meg 50g-ostól 170g-os húzósúlyig, 20g-os különbségekkel. Mindegyik mérést háromszor megismételjük.

A második mérés segítségével kiszámolhatjuk a kötél egységnyi hosszra jutó tömegét. Ennek ellenőrzésére analitikai mérleggel megmérjük egy másik, ugyanilyen kötél tömegét, és mérőszalaggal a hosszát. Ezekből az adatokból is kiszámoljuk az egységnyi hosszra jutó tömeget.

## Mérési adatok

Az órán a következő adatokat mértem:

1, mérés

| n | f (Hz) | Δf (Hz) |
|---|---|---|
| 2 | 10,5 | 0,4 |
| 3 | 16,3 | 0,4 |
| 4 | 20,8 | 0,3 |
| 5 | 26,2 | 0,5 |
| 6 | 31,4 | 0,4 |

2. mérés

| m (g) | f1 (Hz) | f2 (Hz) | f3 (Hz) | fátlag |
|---|---|---|---|---|
| 50 | 44,7 | 44,4 | 44,9 | 44,67 |
| 70 | 52,9 | 52,5 | 53,1 | 52,83 |
| 90 | 59,9 | 59,6 | 60,1 | 59,87 |
| 110 | 66,1 | 65,8 | 66,4 | 66,1 |
| 130 | 71,9 | 72,2 | 71,7 | 71,93 |
| 150 | 77,3 | 77,1 | 77,5 | 77,3 |
| 170 | 82,3 | 82,1 | 82,5 | 82,3 |

Az *1. mérés* táblázatban $n$ az egyes állóhullám módusok esetében a félhullámhosszak számát jelenti, $f$ a frekvenciát, $\Delta f$ pedig a frekvencia bizonytalanságát. A *2. mérés* táblázatban $m$ a húzósúly tömege, $f_1$, $f_2$ és $f_3$ a három különböző mérés által adott sajátfrekvenciák, $f_{átlag}$ pedig az egyes húzósúlyok esetében a mért sajátfrekvenciák átlaga. A számolásokban ezeket az átlagértékeket fogom használni.

További mérési eredmények: a rezgő kötél hossza: $L$ = 144,0 cm. Az ellenőrző kötél hossza: $l$ = 4,13 m, tömege: $m_{kötél}$ = 1,1515 g.

## Hibaforrások

A következő dolgok okozhatnak mérési hibát: leolvasási hiba. Hogy nem tudjuk pontosan meghatározni, melyik frekvenciához tartozik az adott állóhullám módus, mert a frekvencia kis megváltoztatásával nem változik jól láthatóan a rezgési állapot. Az a kötél, amivel ellenőrizzük a tömegmérést, nem ugyanaz a kötél, mint amin az eredeti mérést végrehajtjuk, ezért (ha elméletileg ugyanolyan kötél is,) jó mérés esetén is mutatkozhat különbség.

## Kiértékelés és eredmények

Az elméleti összefüggés a rezgés hullámhosszára:

$$\lambda = v/f$$

$v$ a hullám terjedési sebessége. Mivel ismert távolságon ismert számú félhullámhossz jött létre, kiszámítható az egyes esetekben a hullámhossz. A frekvenciaértékeket ismerjük, így megállapítható a hullám terjedési sebessége.

$$\lambda = 2L/n$$
$$v = \lambda f = 2Lf/n$$

Ezen képlet segítségével mindegyik módushoz kiszámoltam a hullám terjedési sebességét.

Ezen kívül mindegyik frekvenciaértékhez kiszámoltam, hogy az adott frekvencia hányszorosa az első frekvencia felének (hogy az arányukat össze lehessen hasonlítani *n*-ek arányával). Ezeket az értékeket *N*-nel jelöltem. A számolt értékeket táblázatba foglaltam:

| n | f (Hz) | v (m/s) | N |
|---|---|---|---|
| 2 | 10,5 | 1,512 | 2 |
| 3 | 16,3 | 1,5648 | 3,105 |
| 4 | 20,8 | 1,4976 | 3,962 |
| 5 | 26,2 | 1,5091 | 4,99 |
| 6 | 31,4 | 1,5072 | 5,981 |

Egy másik összefüggés szerint a sebesség így is számolható:

$$v = \sqrt{(F/(\rho A))}$$

Itt $F$ a húrt feszítő erő, $\rho$ az anyag sűrűsége, $A$ pedig a keresztmetszete. Ez azt jelenti, hogy a hullám terjedési sebessége csak az anyagi minőségtől, és a feszítő erőtől függ. Az első mérés alatt egyik sem változott, így a várakozás szerint ugyanazokat a sebességértékeket kell kapnunk. A táblázat adatai alapján azt mondhatjuk, hogy a sebesség valóban nem függ a frekvenciától. Az eltéréseket valószínűleg a frekvenciamérés bizonytalansága okozza.

Azt is leolvashatjuk, hogy $N \approx n$. Ez azt jelenti, hogy a frekvenciák aránya közel megegyezik az *n*-ek arányával, vagyis a frekvencia és a hullámhossz valószínűleg fordított arányban áll egymással. Ez is azt támasztja alá, hogy a sebesség állandó.

A második méréssel a frekvencia, és a húzótömeg közötti gyökös összefüggést szeretnénk igazolni. Ezt úgy tesszük meg, hogy ábrázoljuk az $f^2$ értékeket $m$ húzótömeg függvényében.

$$v = \sqrt{(F/(\rho A))}$$

$$f = v/\lambda = \sqrt{(F/(\rho A))} / \lambda$$

Mivel $F = mg$

$$f = \sqrt{(mg/(\rho A))} / \lambda$$

Az egyenletet négyzetre emelve:

$$f^2 = mg / \rho A \lambda^2$$

Ezt a függvényt ábrázolva egy $g/\rho A\lambda^2$ meredekségű egyenest kell kapnunk.
A különböző $m$ értékeket, és a hozzájuk tartozó, számolt $f^2$ értékeket a következő táblázat tartalmazza:

| m (g) | f^2 (Hz^2) |
|---|---|
| 50 | 1995,1111 |
| 70 | 2791,3611 |
| 90 | 3584,0178 |
| 110 | 4369,21 |
| 130 | 5174,4044 |
| 150 | 5975,29 |
| 170 | 6773,29 |

Ezen értékekre egyenest illesztettem a GNUPLOT nevű programmal. A kapott egyenes egyenlete:

$f^2 = 39{,}8085m + 1{,}15821$

A táblázatbeli értékeket, és az illesztett egyenest grafikonon ábrázoltam. Az $f^2$ tengely 1,15821-beli metszete elhanyagolható az $f^2$ értékekhez képest. Mivel már meghatároztuk az egyenes meredekségét az ismert képletek átalakításával, a következő összefüggést írhatjuk fel:

$39{,}8085 = g/\rho A\lambda^2$

$\lambda = 2L/n = 2*1{,}14\ \text{m}/3 = 0{,}76\text{m}$

Behelyettesítve az ismert adatokat:

$39{,}8085 = 9{,}81\ \text{m/s}^2 / \rho A(0{,}76\text{m})^2$

Ezt az egyenletet rendezve kapjuk:

$\rho A = 0{,}427\ \text{g/m}$

Mivel a kötelet egy vékony hengernek tekinthetjük, a térfogatát az $Al$ szorzattal kaphatjuk meg, így tömege $\rho Al$. Mi az egységnyi hosszúságra eső tömegét szeretnénk tudni, ami $\mu = \rho Al/l = \rho A$, vagyis a kapott értéket kerestük. Ellenőrzésképpen megmértük egy kötéldarab hosszát, és tömegét. Hossza: $l = 4{,}13$ m, tömege: $m_{kötél} = 1{,}1515$ g. Ebből kiszámolva az egységnyi hosszúságra eső tömeget: $\mu = m_{kötél}/l = 1{,}1515\ \text{g} / 4{,}13\ \text{m} = 0{,}279\ \text{g/m}$.

**Diszkusszió**

A legtöbb eredmény jól mutatja az elméleti számítások helyességét, kivéve a fonáltömeg/hosszúság esetében. Ez betudható mérési hibának.