Periodikusan gerjesztett matematikai inga mozgásának vizsgálata numerikus szimuláció segítségével

Rudolf Ádám

2013. május

1. Az inga fizikai háttere

A matematikai inga egy egyszerű fizikai modell, amiben egy súlytalannak tekintett l hosszúságú merev rúd végén egy m tömegű tömegpont van felfüggesztve. Newton egyenletét felírva forgómozgásra:

$$I\ddot{\Phi} = \sum M, \tag{1}$$

ahol $I = ml^2$ az inga tehetetlenségi nyomatéka, Φ a nyugalmi helyzettől számított kitérése radiánban, $\sum M$ pedig a rúdra ható forgatónyomatékok összege. Ha az inga gravitációs térben van, és a felfüggesztésnél egy $A \cdot \cos(\omega_g t)$ függőleges irányú erővel periodikusan mozgatjuk, ez két részből áll össze:

- A gravitáció hatása: $M_g = -lmg \sin \Phi$
- A gerjesztés hatása: $M_s = A \cdot \cos(\omega_g t) \cdot \sin \Phi$

Így az egyenlet:

$$ml^2\ddot{\Phi} = -lmg \sin \Phi + A \cdot \cos(\omega_g t) \cdot \sin \Phi. \tag{2}$$

Az egyenletet átrendezve, és bevezetve az $a = \frac{A}{ml^2}$ gerjesztési amplitúdót, kapjuk:

$$\ddot{\Phi} = -\frac{g}{l}\left(1 - a \cdot \cos(\omega_g t)\right) \sin \Phi. \tag{3}$$

Ez a periodikusan gerjesztett csillapítatlan matematikai inga differenciálegyenlete. Az a gerjesztési amplitúdó eltűnése esetén visszakapjuk a gerjesztetlen inga egyenletét.

2. Az egyenlet megoldása

Az egyenletet numerikusan, negyedrendű, fix lépésközű Runge-Kutta módszerrel oldottam meg. Mivel a módszer elsőrendű egyenletrendszerek megoldására alkalmas, ez pedig másodrendű egyenlet, visszavezettem egy elsőrendű egyenletrendszerre a következő módon:

$$\dot{\Phi} = \omega$$
$$\dot{\omega} = -\frac{g}{l}\left(1 - a \cdot \cos(\omega_g t)\right) \sin \Phi$$

A negyedrendű Runge-Kutta módszer azért jó, mert viszonylag egyszerű, de a legtöbb probléma esetén kellően pontos eredményt ad. Én a fix lépésközű módszerrel dolgoztam, de bizonyos problémáknál tanácsos adaptálni a lépéseket.

3. A program tesztelése

Az egyenlet és a program ellenőrzése végett vizsgáltam először az $a = 0$ esetet, ami a gerjesztetlen ingának felel meg. Különböző kezdeti kitérésekre vizsgáltam az inga mozgását. $g = 9,81 m/s^2$ és $l = 1m$ esetén kis kitérésekre a várakozásnak megfelelően $1s$ körüli félperiódus időt kaptam, nagyobb kitérésekre ez megnőtt. Lépésközként $dt = 0,01s$-ot használtam, és 60 000 lépést futtattam, vagyis tíz percen keresztül léptettem a rendszert. Kis kezdeti kitésérnél ez kb. 3000, nagy kitérés esetén jóval kevesebb, de még mindig több száz periódust jelent. Az 1. és a 2. ábrákon kirajzoltam ezen két eset fázistérbeli trajektóriáit. Láthatóan mindkét esetben jól záródó görbét kapunk, így a gyorsan lefutó szimuláció eredményét pontosnak tekintem, további számításokra alkalmasnak tartom.

4. Kaotikus mozgás

A gerjesztett inga saját, és a gerjesztési frekvencia, valamint amplitúdó függvényében mozoghat kaotikusan. A kaotikus mozgás jellemzésére egy módszer, hogy a gerjesztés periódusidejének megfelelő időközönként mintát veszünk a fázistérből. Ezt stroboszkópikus metszetnek hívjuk. Az ilyen nemlineáris rendszerekre jellemző, hogy a paraméterektől függően minőségileg különböző típusú mozgásokat produkál. Néhány választott paraméter összeállításra ábrázoltam a stroboszkópikus metszeteket. Az átfordulásokkor nem hajtogattam vissza az értékeket $-\pi$ és π közé. A 3.-8. ábrákon néhány példa látható. Az esetek leírása a képaláírásokban látható.

5. A felső egyensúlyi helyzet stabilitása

Bizonyos esetekben a felső egyensúlyi helyzet, azaz a $\Phi = \pi$ stabillá válhat. Ehhez két feltétel szükséges:

$$\sum M\Big|_{\pi} = 0 \tag{4}$$

és

$$\frac{\mathrm{d}\sum M}{\mathrm{d}\,\Phi}\Bigg|_{\pi} < 0. \tag{5}$$

Az első egyenletünk minden esetben teljesül, ugyanis:

$$\sum M\Big|_{\pi} = -\frac{g}{l}\left(1 - a\cdot\cos(\omega_g t)\right)\underbrace{\sin\Phi}_{=\,0}\Bigg|_{\pi} = 0. \tag{6}$$

A másik egyenlet érdekesebb:

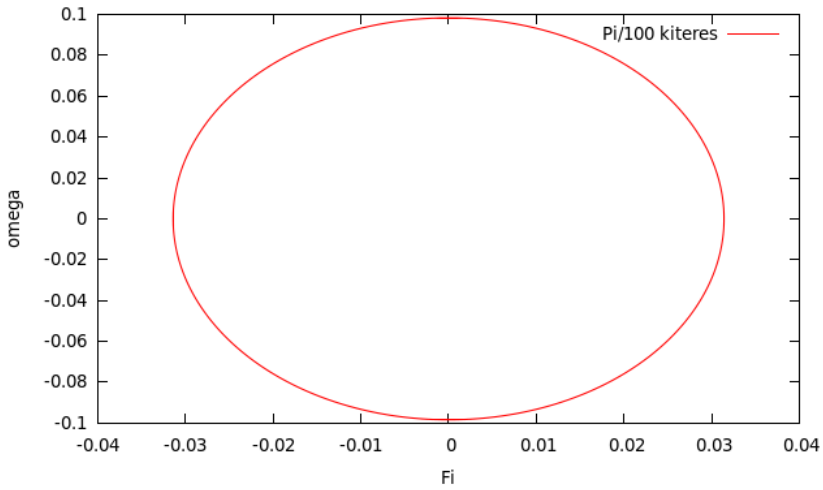
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} -\frac{g}{l}\left(1 - a\cdot\cos(\omega_g t)\right)\sin\Phi\Big|_{\pi} &= -\frac{g}{l}\left(1 - a\cdot\cos(\omega_g t)\right)\underbrace{\cos\Phi}_{=\,\text{-1}}\Bigg|_{\pi}\\ &= \frac{g}{l}\left(1 - a\cdot\cos(\omega_g t)\right).\end{aligned} \tag{7}$$

Ebből:

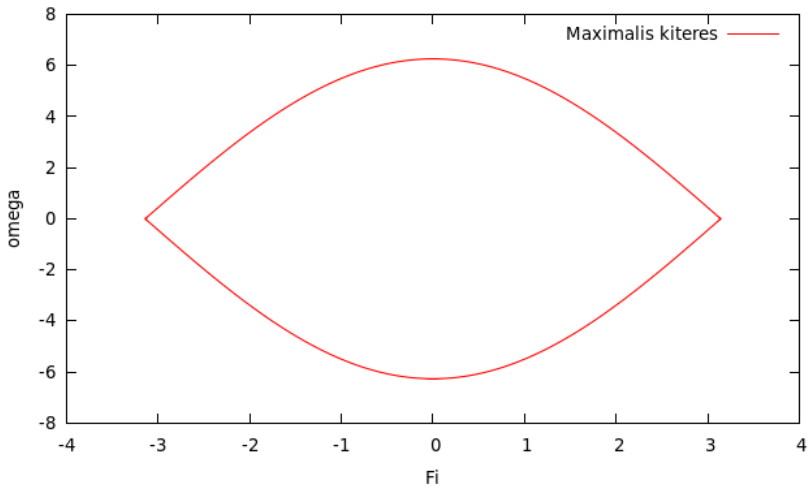
$$a\cdot\cos(\omega_g t) > 1. \tag{8}$$

Ez $a > 1$ esetén véges ideig mindig érvényesül. Hogy a hatása hosszan tartó legyen, alacsony frekvenciát kell választanunk. Ehhez $a = 10$-et és

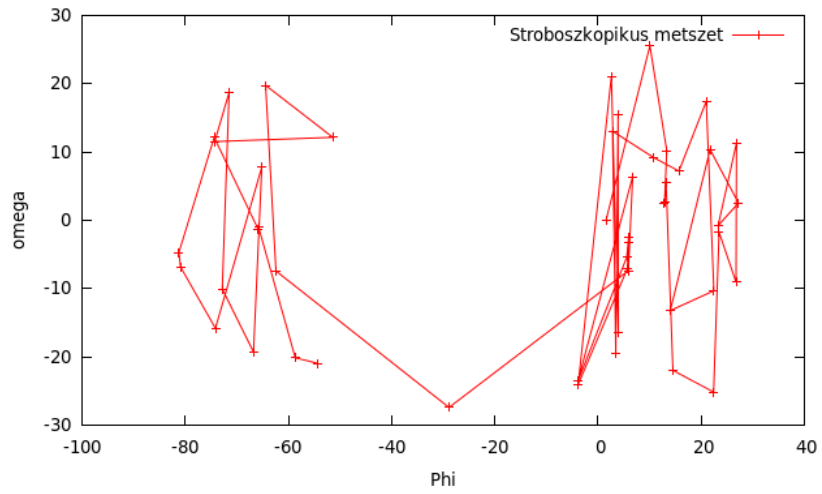
$\omega_g = 0,05$-öt választottam. A fenti kifejezés $t = \arccos(1/10)/0,05 = 29,41s$-nál csökken egy alá, vagyis ez előtt a fenti helyzet stabil, a lenti pedig instabil, és ennél a t-nél megfordul. A 9. és 10. ábrán ábrázoltam ez esetben az inga szögének időfüggését és a fázistérbeli trajektóriákat. Jól látható, hogy előbb $\Phi = \pi$ körül, majd $\Phi = 2\pi$ körül oszcillál, ami a periodicitás miatt természetesen ekvivalens a $\Phi = 0$-val. A szimuláció végén épp megint átvált a mozgás, és ismét a fenti helyzet körül kezd oszcillálni. Az is megfigyelhető, hogy ahogy csökken a gerjesztőerő, a váltások közelében mindig nagyobb az amplitúdó, majd megtörténik az átbillenés.



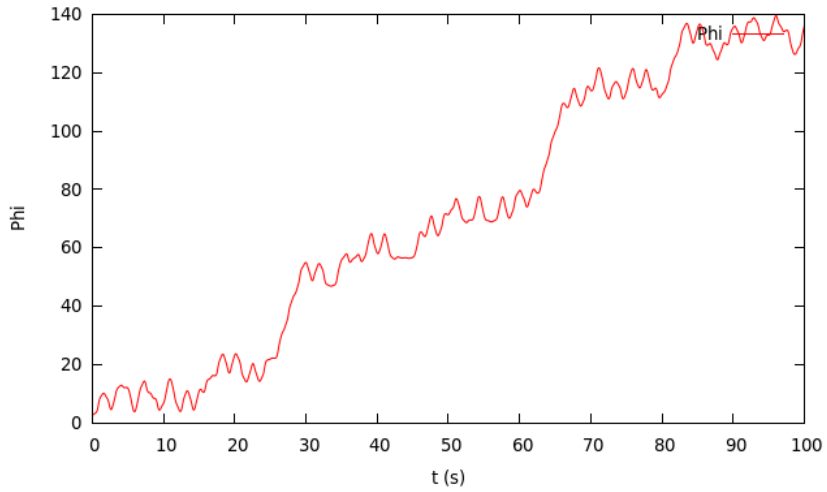
1. ábra. Az inga fázistérbeli trajektóriája gerjesztésmentes esetben, $\Phi(t=0) = \pi/100$ kezdeti kitérés esetén. A trajektóriák jól záródnak.



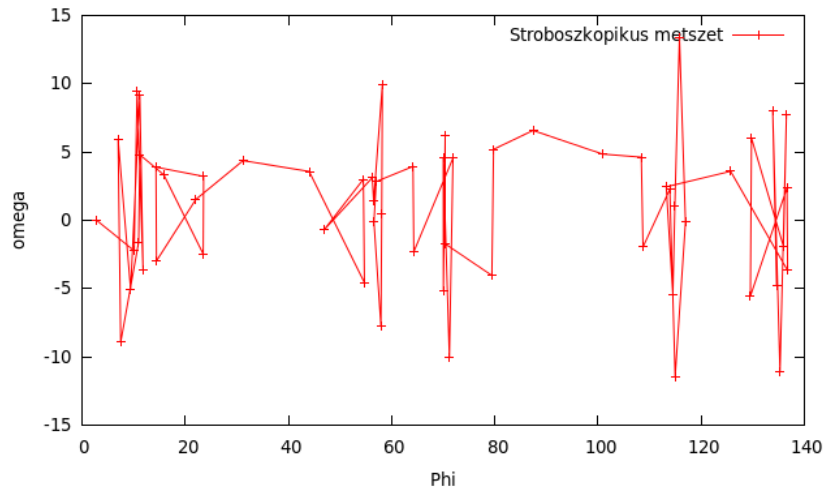
2. ábra. Az inga fázistérbeli trajektóriája gerjesztésmentes esetben, $\Phi(t=0) = \pi$ kezdeti kitérés esetén. Ez egy instabil egyensúlyi helyzet, amiből a numerikus hibáknak köszönhetően kibillen a rendszer. A trajektóriák itt is jól záródnak.



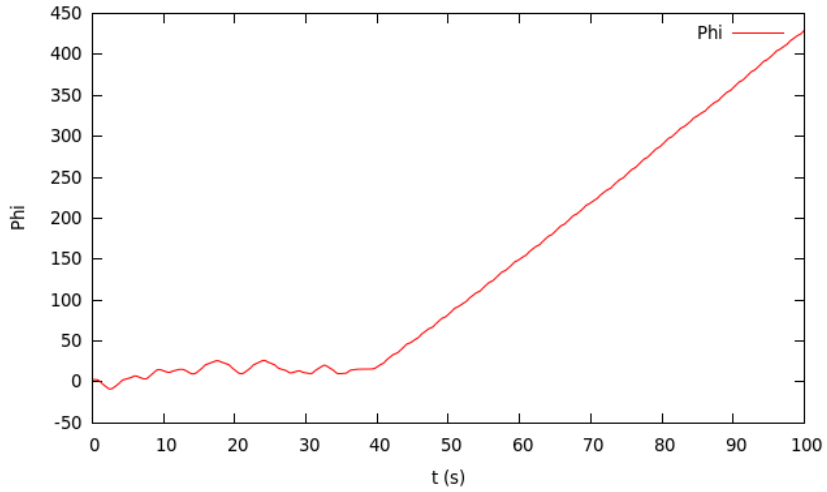
3. ábra. Stroboszkópikus metszet. $a = 20, \omega \approx \pi, T = 4s$. Látszik, hogy a szabályos időközönként vett minták szabálytalanul követik egymást. Az is látszik, hogy először egy területen, azaz átfordulás nélkül mozog az inga, majd véletlenül találkozik az inga és a gerjesztés fázisa, hogy az inga átfordul, majd ismét az egyensúly körül mozog.



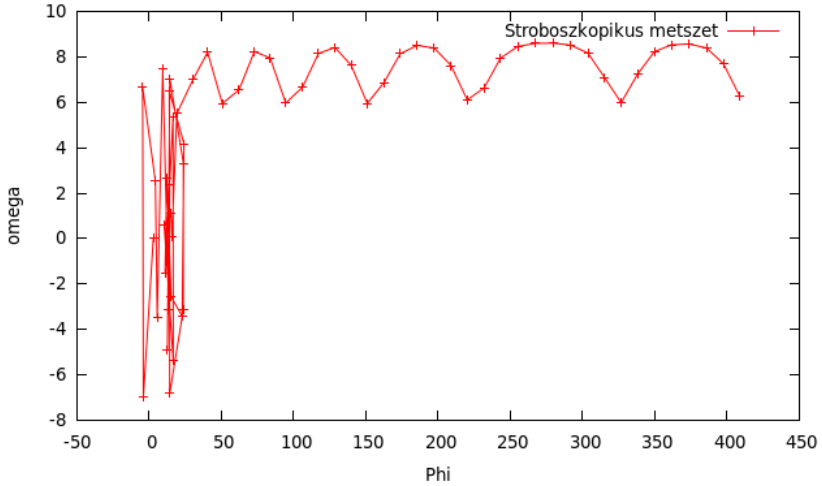
4. ábra. Az elfordulási szög időfüggése. $a = 20, T = 24s$. Viszonylag alacsony frekvenciás gerjesztés. Az inga az egyensúly körül mozogközel a periodikushoz, majd több átfordulást végez, aztán ismét az egyensúly körül mozog.



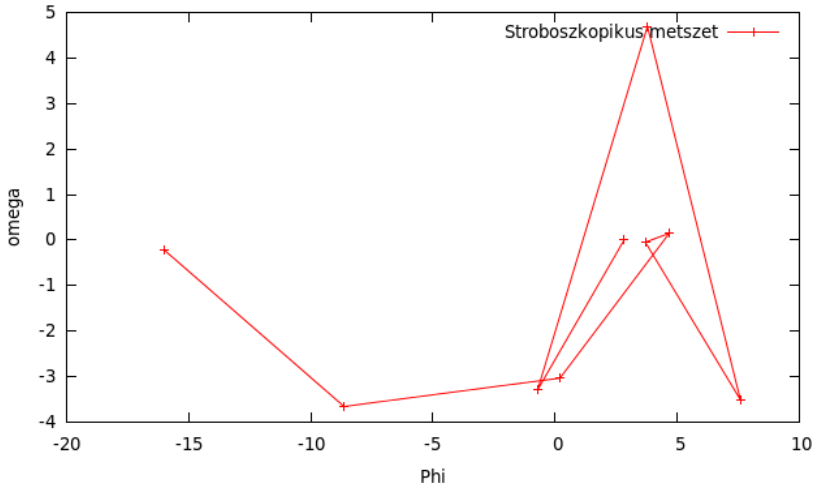
5. ábra. Az előző példa stroboszkópikus metszete. Itt is látszik a kvázi véletlen mozgás, majd egy idő után az egy periódussal odébb lépés.



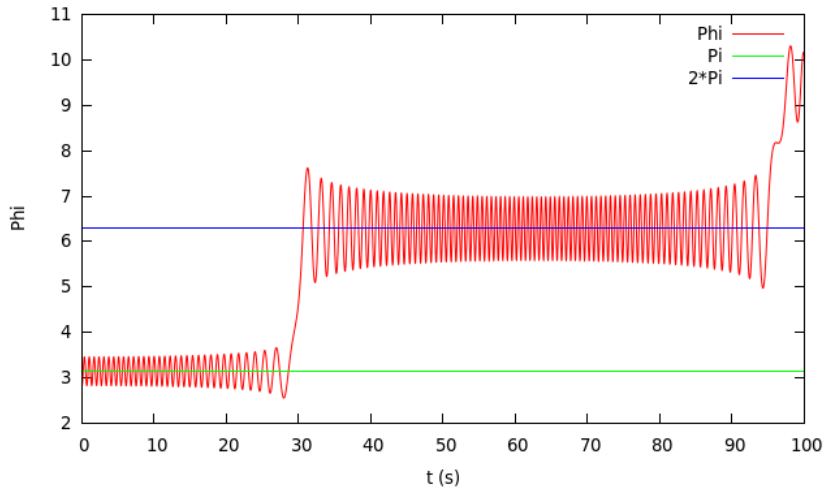
6. ábra. $a = 1,2, \omega_g = 3,761/sT_g = 1,67s$. A gerjesztőerő a gravitáció nagyságrendjébe esik, a frekvencia pedig alig nagyobb az inga saját kis kitérésű frekvenciájánál. Ez lebegési jelenségeket hozhat létre. Látszik, hogy először az egyensúlyi helyzet körül mozog az inga néhány átpördüléssel, majd a gerjesztés és a lengés fázisa úgy találkoznak, hogy az inga hirtelen pörögni kezd, és a szimuláció végéig ez le sem áll.



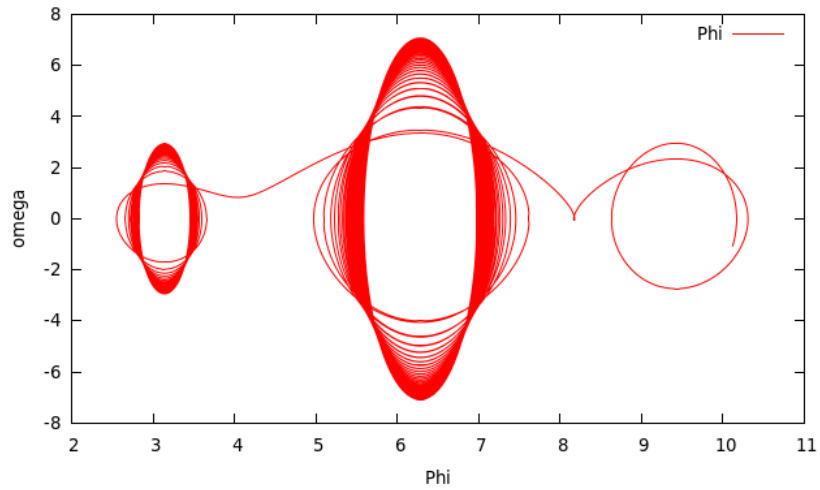
7. ábra. Az előző példa stroboszkópikus metszete. A pörgés közben nyomon követhető a sebesség ingadozása kb. a két frekvencia különbségekén ($\omega_g = 1,2\omega_s$, ahol ω_s az inga sajátfrekvenciája kis kitérések esetén).



8. ábra. Végül ugyanúgy $a = 1,2$-es gerjesztési amplitúdón, de alacsonyabb, $\omega_g = 0,631/s$-os frekvencián, azaz $T = 10,03s$-os gerjesztési periódusidővel. Mivel a periódusidő nagy, a stroboszkópikus metszeten kevés pont van, de látszik, hogy az inga átfordulásokat végez mindkét irányba, ránézésre véletlenszerűen. Ez a mozgás kaotikus.



9. ábra. $a = 10$, $\omega_g = 0,05$. Lassú változás a fölső és az alső egyensúlyi helyzetek stabilitása között.



10. ábra. A fenti eset a fázistérben. Jól megfigyelhetőek a különböző helyzetek körüli oszcillációk változó amplitúdóval.