1. The Cournot Duopoly

(a) A legjobb válasz függvény a játékra vonatkoztatva az összes játékos által létrehozott stratégiaprofilon van értelmezve, és szintén stratégiaprofilra képez. Esetünkben ez egy egyszerű $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvény lesz, mert a stratégiákat valós számokkal tudjuk jelölni, és a legjobb válasz függvények nagy szerencsénkre egyértékűek. Esetünkben a játék legjobb válasz függvénye:

$$R(q_1, q_2) = \left(\frac{1}{2}(M - c - q_2), \frac{1}{2}(M - c - q_1) \right)$$

Most azt kéne belátnunk, hogy a függvény teljesíti azokat a kritériumokat, amik biztosítják, hogy egy Nash-egyensúly legyen. Ezek a következők:

- Kompakt, konvex tarományon van értelmezve. Mivel az értelmezési tartomány $\mathbb{R}^2$ egy zárt részhalmaza, ez telejsül.
- A kifizetésfüggvényeknek konkávnak kell lennie. A kifizetésfüggvény ilyen alakú: $u_1 = (M - c - (q_1 + q_2))q_1 = -q_1^2 - q_1(M - c - q_2)$. Ez egy lefelé nyíló parabola, ami konkáv. Ugyanez a másik játékosra is igaz. Tehát ez a feltétel is teljesül.
- *R* leképezésnek kontrakciónak kell lennie. Ez azt jelenti, hogy (esetünkben) valamilyen távolságfogalmat definiálva a stratégiaprofil pontjai között bármilyen pontpár távolsága nagyobb, mint a képeik távolsága. Ez biztosítja, hogy a játék során a stratégiák konvergáljanak és beálljon az egyensúly. Arra jutottunk, hogy ezt belátni bonyolultabb, mint amilyennek elsőre látszik, így nem bizonyítottuk.

(b) Miért nem érdemes a játékosoknak kevert stratégiát használniuk? Azért nem, mert – mivel a stratégiákat egy valós intervallumon elhelyezkedő számokkal tudjuk reprezentálni - a kevert stratégiáknak megfelel egy köztük elhelyezkedő tiszta stratégia. És mivel a kifizetésfüggvények konkávak, a tiszta stratégiához biztosan nagyobb kifizetés tartozik, mint a neki megfelelő bármilyen kevertnek.

2. Best Response Functions in Pure Strategies and Fixed Points

A játékosok válaszfüggvényei az ellenfelek rögzített stratégiaprofiljához rendel egy, vagy több stratégiát, ami az adott profil mellett a legjobb kifizetést eredményezi. Ez többértékű függvény is lehet. Egy stratégiaprofil akkor Nash-egyensúly, ha a játék legjobb válasz függvénye önmagát rendeli hozzá.

<u>Az első játék esetén:</u>

$$R_1(A_2) = \{A_1, C_1\} \quad , \quad R_1(B_2) = \{A_1, C_1\} \quad , \quad R_1(C_2) = \{C_1\}$$
$$R_2(A_1) = \{B_2, C_2\} \quad , \quad R_2(B_1) = \{A_2, C_2\} \quad , \quad R_2(C_1) = \{B_2\}$$

	A_2	B_2	C_2
A_1	(20,15)	(16,16)	(16,16)
B_1	(18,9)	(12,8)	(18,9)
C_1	(20,15)	(16,16)	(18,9)

Mind a legjobb válasz függvényekből, mind a rajzból látható, hogy nincs Nash-egyensúly.

Második játék:

Ez egy zérus összegű játék. A sorjátékos minimalizál, az oszlopjátékos maximalizál.

$$R_1(A_2)=\{C_1\} \quad , \quad R_1(B_2)=\{B_1\} \quad , \quad R_1(C_2)=\{A_1\}$$
$$R_2(A_1)=\{A_2\} \quad , \quad R_2(B_1)=\{C_2\} \quad , \quad R_2(C_1)=\{C_2\}$$

	A_2	B_2	C_2
A_1	0	1	7
B_1	4	2	3
C_1	9	0	0

Látszik, hogy $R(B_1, B_2)=(B_1, B_2)$, vagyis a B_1, B_2 stratégiapár fixpontja a játék legjobb válasz függvényének, azaz egyensúly lesz.

Harmadik játék:

$$R_R(C_C, C_L)=\{D_R\} \quad , \quad R_R(D_C, C_L)=\{C_R\} \quad , \quad R_R(C_C, D_L)=\{C_R\} \quad , \quad R_R(D_C, D_L)=\{D_R\}$$
$$R_C(C_R, C_L)=\{D_C\} \quad , \quad R_C(D_R, C_L)=\{C_C\} \quad , \quad R_C(C_R, D_L)=\{C_C\} \quad , \quad R_C(D_R, D_L)=\{D_C\}$$
$$R_L(C_R, C_C)=\{D_L\} \quad , \quad R_L(D_R, C_C)=\{C_L\} \quad , \quad R_L(C_R, D_C)=\{D_L\} \quad , \quad R_L(D_R, D_C)=\{C_L\}$$

Larry C

		Colin C	Colin D
Rose	C	(1,1,-2)	(-4,3,1)
	D	(2,-4,2)	(-5,-5,10)

Larry D

		Colin C	Colin D
Rose	C	(3,-2,-1)	(-6,-6,12)
	D	(2,2,-4)	(-2,3,-1)

Habár a nyilazás kicsit kaotikus, ki lehet silabizálni, hogy a (D_R, C_C, C_L) és a (C_R, C_C, D_L) stratégiaprofilok egyensúlyt jelentenek.

3. Best Response Function in Mixed Strategies

Három játékra kiszámoltuk, hogy van-e egynesúly kevert stratégiákra, és ha van, akkor mi az. A mód az, hogy mindkét játékos tiszta stratégiáira meghatárzzuk a kapott kifizetést a várható érték alapján, ha a másik játékos kevert stratégiát játszik. Majd ezeket összehasonlítva meghatáozhatjuk, hogy melyik a nagyobb az ellenfél különböző kevert stratégiái esetén. És az a kevert stratégia pár, ami kölcsönösen legjobb válaszokat ad, egyensúly lesz.

Chicken:

			Colin $1-q$	Colin q
			C_1	C_2
Rose	$1-p$	R_1	(2,2)	(0,3)
	p	R_2	(3,0)	(-1,-1)

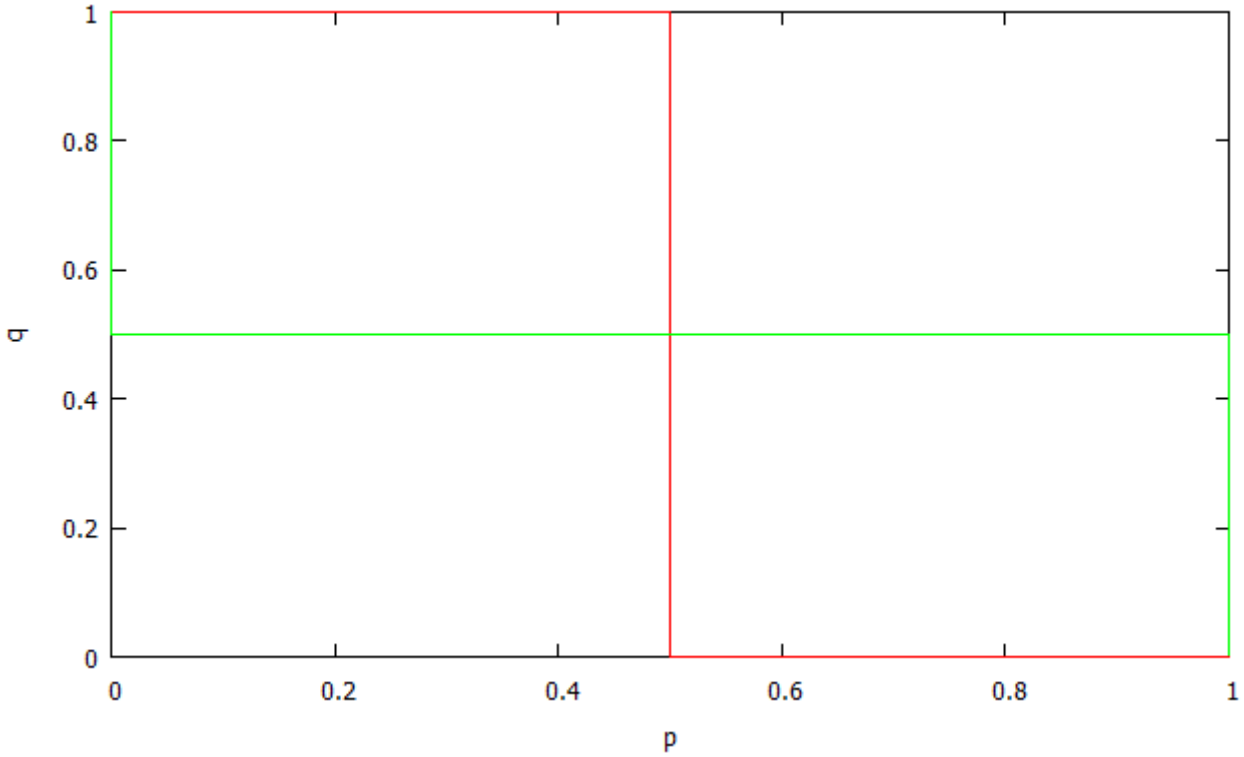
Kifizetés függvények:

$$U_R(R_1, p)=2\cdot(1-q)+0\cdot q=2-2\cdot q \quad , \quad U_R(R_2, q)=0\cdot(1-q)-3\cdot q=3-4\cdot q$$
$$U_C(C_1, p)=2\cdot(1-p)+0\cdot p=2-2\cdot p \quad , \quad U_C(C_2, p)=3\cdot(1-p)-1\cdot p=3-4\cdot p$$

Mivel a játék játékos szimmetrikus, a kifizetésfüggvények ugyanolyan alakúak (és a legjobb válasz függvények is azok lesznek). Adott játékos két függvénye akkor egyenlő, ha az argumentuma 1/2. Ekkor mindegy, hogy milyen stratégiát választunk. Ez alapján a legjobb vláasz függvény:

$$R_R(q)=\begin{cases}\{1\} & \text{, ha } q<1/2\\ [0,1] & \text{, ha } q=1/2\\ \{0\} & \text{, ha } q<1/2\end{cases}$$

Colin legjobb válasz függvénye ugyanilyen alakú. Grafikusan ábrázolva ezeket a halamzokaz a *p*-*q* síkon görbéket kapunk, amik metszetei jelentik az egyensúlyi pontokat:



Ezen az ábrán is látszik, és be is látható, hogy az (1/2, 1/2), (1,0) és (0,1) pontok Nash-egyensúlyok.

A másik két játék gondolatmenete is elég hasonló, ezért nem részletezem, csak az eddigiektől eltérő dolgokat.

Stag Hunt

			Colin	
			1-q	*q*
			S_C	H_C
Rose	*1-p*	S_R	(2,2)	(-2,1)
	p	H_R	(1,-2)	(-1,-1)

$$U_R(S_R,q)=2\cdot(1-q)+2\cdot q=2-4\cdot q \quad , \quad U_R(H_R,q)=1\cdot(1-q)-2\cdot q=1-2\cdot q$$
$$U_C(S_C,p)=2\cdot(1-p)+2\cdot p=2-4\cdot p \quad , \quad U_C(H_C,p)=1\cdot(1-p)-2\cdot p=1-2\cdot p$$

$$R_R(q)=\begin{cases}\{0\} & \text{, ha } q<1/2\\ [0,1] & \text{, ha } q=1/2\\ \{1\} & \text{, ha } q<1/2\end{cases}$$

Ez eléggé hasonlít azelőző esetre, csak a (0,1) és (1,0) pontok helyett a (0,0) és (1,1), vagyis a diagonális tiszta stratégiák lesznek egyensúlyok. Az (1/2, 1/2) megmarad itt is.

Prisoner's Dilemma

			Colin	
			1-q	*q*
			C_C	D_D
Rose	*1-p*	C_R	(1,1)	(-2,2)
	p	D_R	(2,-2)	(-1,-1)

$$U_R(C_R,q)=1\cdot(1-q)-2\cdot q=1-3\cdot q \quad , \quad U_R(D_R,q)=2\cdot(1-q)-1\cdot q=2-3\cdot q$$
$$U_C(C_C,p)=1\cdot(1-p)-2\cdot p=1-3\cdot p \quad , \quad U_C(D_C,p)=2\cdot(1-p)-1\cdot p=2-3\cdot p$$

Mivel a két függvény meredeksége megegyezik, mindkét játékosnak a D stratégiát adja a legjobb válasz függvény. Ez azt jelenti, hogy a (D_R, D_D) tiszta stratégiapár egyensúy lesz, ezen kívül nem lesz egyensúly a játékban.

4. Two General Formulae for Zero-Sums

(a) 2 x 2-es zérus összegű játékot tekintünk, aminek nincsen nyeregpontja, azaz nincsen tiszta stratégiás Nash-egyensúly. Feladatunk kiszámolni a kevert stratégiás egyensúlyt és a játék értékét.

A játék mátrixa: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Jelölés: a sorjátékos a fölső sort *p*, az alsót 1-*p* valószínűséggel játssza. Tételezzük fel, hogy a mátrix invertálható, azaz determinánsa nem tűnik el: $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$

Felírhatjuk az oszlopjátékos bevételét. Ha egyensúlyban vagyunk, ennek meg kell egyeznie a két tiszta stratégiára:

$$\begin{aligned} pa+(1-p)c &= pb+(1-p)d \\ pa+c-pc &= pb+d-pd \\ (a+d-b-c)p &= d-c \\ p &= \frac{d-c}{a+d-b-c} \end{aligned}$$

Hasonló gondolatmenettel kaphatjuk meg az oszlopjátékos kevert sratégiáját is: $q=\frac{d-b}{a+d-b-c}$, ahol *q* az első oszlop választásának valószínűsége.

A játék *v* értéke pedig az az érték, amit mindketten kapnak kifizetésként az egyensúlyban. Ez a várható érték, ahova egyszerűen behelyettesítjük valamelyik fent kapott valószínűséget:

$$v=pa+(1-p)c=\frac{(d-c)a}{a+d-c-b}+c+\frac{(c-d)c}{a+d-c-b}=\frac{da-ca+ac+dc-c^2-bc+c^2-cd}{a+d-c-b}$$

$$=\frac{da-bc}{a+d-b-c}=\frac{\det A}{a+d-b-c}$$

(b) Most azt kell bizonyítanunk, hogy $v=1/(e^T A^{-1} e)$, ahol e = (1,1). Ellenőrzéssel belátható, hogy $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, valamint hogy egy mátrixot a fenti módon "szendvicselve" ezzel a vektorral nem mást kapunk, mint az elemeinek összegét. Ezek alapján:

$$(e^T A^{-1} e)^{-1}=(\det A)(d+a-b-c)^{-1} \quad ,$$

ez pedig megegyezik *v* fent kiszámolt értékével, azaz az állítást bebizonyítottuk.

5. Equilibrium for a 2 x 3 Game

A következő 2 x 3-as játékra szeretnénk kiszámolni a kevert stratégiás egyensúlyt:

		Colin		
		q_1	q_2	q_3
		L	**M**	**R**
Rose	**T**	(7,2)	(2,7)	(3,6)
	B	(2,7)	(7,2)	(4,5)

Rose szempontjából keressük a kevert stratégiát, amire igaz:

1.: $7q_1+2q_2+3q_3=2q_1+7q_2+4q_3$
2.: $q_1+q_2+q_3=1$
3.: $q_i \geqslant 0 \forall i$

Teljesen kevert stratégiára ilyen nem létezik. Valamelyik valószínűséget 0-nak kell választanunk, hogy teljesíteni tudjuk a feltételeket:
Például legyen q_1 = 0. Ekkor:

1.: $2q_2+3q_3=7q_2+4q_3$
2.: $q_2+q_3=1$
3.: $q_i \geqslant 0 \forall i$

Az első feltételből az jön ki, hogy q_2-nek és q_3-nak különböző előjelűnek kellene lennie, az pedig a harmadik feltételnek ellentmond, tehát ez sem jó megoldás.
Látszik, hogy az első kettő (L és M) stratégiák elég szimmetrikusak. Próbáljuk ez alapján eldobni R-t, azaz válasszuk most q_3-at 0-nak!

1.: $7q_1+2q_2=2q_1+7q_2$
2.: $q_1+q_2=1$
3.: $q_i \geqslant 0 \forall i$

Az első feltételből triviálisan látszik, hogy $p_1 = p_2$, a másodikból pedig, hogy mindkettő megegyezik 1/2-del. Könnyen belátható, hogy ekkor Rose-nak is megéri az 1/2, 1/2 kevert stratégiát választania, ugyanis ekkor fog megegyezni a két kifizetése, ez tehát a játék egyensúlya kevert stratégiákra.