1. Rational Players and Games

0 összegű játékoknál a jelölés szerint a sorjátékos maximalizálni, az oszlopjátékos minimalizálni akar. A lépések szóbeli részletezése nélkül a játékok mátrixait közlöm a következő jelölésekkel: az eredeti mátrixból indulok ki, és szürkével jelölöm a (gyengén, vagy erősen) dominált stratégiákat. A jelölés egyszerűsítése miatt nem jelöltem, hogy melyik a domináló stratégia, de viszonylag egyszerű emgtalálni. A következő lépésben már az előbb eliminált stratégia nélkül közlöm a mátrixot, és megint szürkével jelölöm az eliminálhatót. Ez megy addig, amíg lehet eliminálni stratégiákat. Ezután a biztonsági stratégiákat határoztam meg a következő módon: a sorok végére kiírtam az adott sor minimumát, az oszlopok aljára pedig az oszlop maximumát. Ezután a jobb alsó sarokba a macimumok minimumát és a minimumok maximumát. Ha a kettő megegyezik, az a játék értéke, és létezik egyensúly tiszta stratégiákkal. Ha különböznek, csak kevert stratégiák felhasználásával lehet egyensúly, de ezek kiszámolása nem feladatunk most.

Az első játék:

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
A	1	1	1	2	2
B	2	1	1	1	2
C	2	2	1	1	1
D	2	2	2	1	0

	C	**D**	**E**
A	1	2	2
B	1	1	2
C	1	1	1
D	2	1	0

	C	**D**	**E**
A	1	2	2
D	2	1	0

	C	**E**	
A	1	2	**1**
D	2	0	0
	2	**2**	2/1

Az 5 x 6-os játékot három lépésben leredukáltuk 2 x 2-esre. A redukált játékban a sorjátékos biztonsági stratégiája **A**, míg az oszlopjátékosé **C** és **E** egyaránt. Viszont a $\min_{sor}\max_{oszlop}$ nem egyezik meg a $\max_{oszlop}\min_{sor}$-ral, így a játéknak nincs értéke, tiszta stratégiáknál nincs egyensúly.

Második játék:

	A	**B**	**C**	**D**
A	3	-6	2	-4
B	2	1	0	1
C	-4	3	-5	4

	B	**C**	
A	-6	2	-6
B	1	0	0
C	3	-5	**5**
	3	**2**	2/5

Csak egy redukciós lépésünk lehet, utána uyganúgy nincsen egyensúlyi tiszta stratégiapár.

Harmadik játék:

	A	**B**	**C**
A	(1,0)	(6,4)	(0,9)
B	(3,7)	(2,3)	(4,0)
C	(2,1)	(0,2)	(3,0)

	A	**B**	**C**
A	(1,0)	(6,4)	(0,9)
B	(3,7)	(2,3)	(4,0)

	A	**C**
A	(1,0)	(0,9)
B	(3,7)	(4,0)

	A	**C**
B	(3,7)	(4,0)

	A
B	(3,7)

4 lépésben a stratégiák eliminálásával eljutottunk egy adott stratégiapárhoz, ami egyensúly lesz, biztonsági stratégiák használata nélkül.

Negyedik játék:

	A	B	C	D
A	3	2	4	2
B	3	1	3	9
C	2	2	2	2

	A	B	C	D
A	3	2	4	2
B	3	1	3	9

	B
A	2
B	1

	B
A	2

Az előző esethez hasonlóan tisztán eliminálással eljutottunk az egyensúlyhoz.

Ötödik és hatodik játék:

	A	B	C	
A	-2	0	4	-2
B	2	1	3	**1**
C	3	-1	-2	-2
	3	**1**	4	1/1

	A	B	C	
A	4	3	8	**3**
B	9	5	1	1
C	2	7	6	2
	9	**7**	8	3/7

Egyik játékban sem tudunk eliminálni, így csak a biztonsági stratégiákat határozhatjuk meg a szokásos módon. Az első esetbn a (**B,B**) pár egyensúlyhoz vezet, a játék értéke 1. A második esetben nincs egyensúly, csak kevert stratégiák használatával.

Fontos megjegyezni, hogy csak a fenti lépéseket tudtuk megtenni, azaz a stratégiákat nem lehetett más sorrendben eliminálni, így a kapott eredmények egyértelműek.

2. 3 szereplős fogoly dilemma

A játékos-szimmetria bizonyításához elég belátni, hogy két játékospár felcserélhető. Ez akkor igaz, ha a mátrixokat transzponálva, és a két játékos kifizetését felcserélve ugyanazt a mátrixot kapjuk. Először a Rose-Colin csere (Larry kifizetései nélkül):

Larry C

		Colin	
		C	**D**
Rose	**C**	(1,1)	(0,3)
	D	(3,0)	(2,2)

Larry D

		Colin	
		C	**D**
Rose	**C**	(0,0)	(-2,2)
	D	(2,-2)	(-1,-1)

Átalakítva Rose-Larry párosra értelmeszerűen, ezúttal (R,L) kifizetésekkel:

Colin C

		Larry	
		C	**D**
Rose	**C**	(1,1)	(0,3)
	D	(3,0)	(2,2)

Colin D

		Larry	
		C	**D**
Rose	**C**	(0,0)	(-2,2)
	D	(2,-2)	(-1,-1)

Látható, hogy mindegyik mátrixra igazak a fent leírtak, így a R-C és a R-L cserére is szimmetrikus a játék, azaz a C-L-re is, mert az elállítható az előbbi kettőből.

Racionális játékosok eliminálnák a **C** stratégiát, így a (**D,D,D**) stratégiahármas jönne létre, miközben a (**C,C,C**) mindenkinek jobb lenne, de az nem egyensúly.

A játék a fogoly dilemma háromszemélyes változata.

3. Computing Security Strategies for Small Games

(a) A mátrixnak akkor és csak akkor van nyeregpontja, ha a sorok minimumelemeinek maximuma megegyezik az oszlopok maximumainak minimumával.

Vegyük először azt az esetet, ahol a két legnagyobb elem átlósan ellentétes oldalon van: $a, d > b, c$

a	b	b
c	d	c
a	d	

A már megszokott módon kiírtam jobbra a minimumokat, alulra a maximumokat. Már most látszik, hogy nem lehet a minimumok maximuma és a maximumok minimuma egyenlő, mert nem szerepel kétszer ugyanaz a szám a különböző helyeken. $min\{a, d\} \neq max\{c, b\}$

Vegyük most azt az esetet, ahol a két legnagyobb elem egy sorban (vagy egy oszlopban van: $a, b > c, d$:

a	b	min{a,b}
c	d	min{c,d}
a	b	

Itt a kettő mindenképpen meg fog egyezni, hiszen a minimumok maximuma mindenképpen $min\{a, b\}$, a maximumok minimuma pedig látszik, hogy szintén $min\{a, b\}$. A kettő ugyanaz, tehát az ilyen 2 x 2-es mátrixnak mindig van nyeregpontja. A többi eset megkapható ezek átrendezésével.

(b) A kifizetésfüggvény (a sorjátékosra) a kevert stratégiák szerinti várható értékként áll elő:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= (1-x)(1-y)+3(1-x)y+4\mathrm{x}(1-y)+2\mathrm{xy} \\ &= 1-x-y+xy+3\mathrm{y}-3\mathrm{xy}+4\mathrm{x}-4\mathrm{xy}+2\mathrm{xy} \\ &= -4\mathrm{xy}+3\mathrm{x}+2\mathrm{y}+1 \end{aligned}$$

Olyan pontokat keresünk, ahol az első derivált 0. Ennek a függvénynek a deriváltja (gradiense) egy vektor, amit egyszerű deriválással meghatározhatunk:

$$\mathrm{D}\,U = \begin{pmatrix} -4\mathrm{y}+3 \\ -4\mathrm{x}+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ez egy egyenletrendszer, aminek megoldása: $y = \frac{3}{4}$ és $x = \frac{1}{2}$.

U mádosik deriváltja mártix (megintcsak nem nehéz megkapni):

$$\mathrm{D}^2\,U = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Ez konstans, ami nem meglepő, mivel az eredeti függvényünk *x*-ben és *y*-ban is lineáris volt. Be kell látnunk, hogy ez az $\begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ pontban (igazából mindenhol) negatív definit,

mert ekkor igaz, hogy az adott pont nyeregpont. Ez 2 x 2-es mátrixokra akkor igaz, ha determinánsuk negatív (mert ekkor eltér a két sajátérték előjele). A fenti mátrix determinánsáról hosszas számításko elvégzése után kiderül, hogy -16, ami negatív, így a kérdéses pont nyeregpont. Tehát a minimax kevert stratégiák esetén a fenti számok egyensúlyt eredményeznek.

(c) Az sorjátékos kifizetéseinek várható értékei az ellenfél négyféle tiszta stratégiájára:

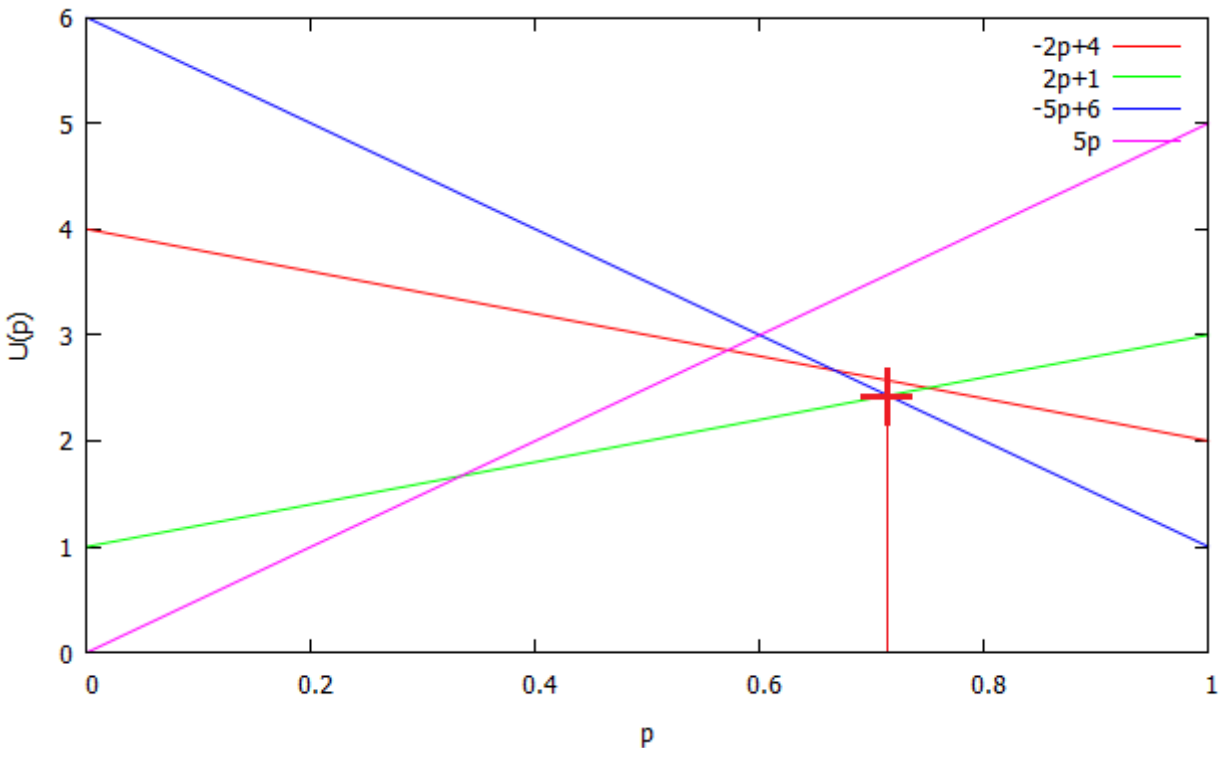
$$2\mathrm{p}+4(1-p)=-2\mathrm{p}+4$$

$$3\mathrm{p}+(1-p)=2\mathrm{p}+1$$

$$p+6(1-p)=-5\mathrm{p}+6$$

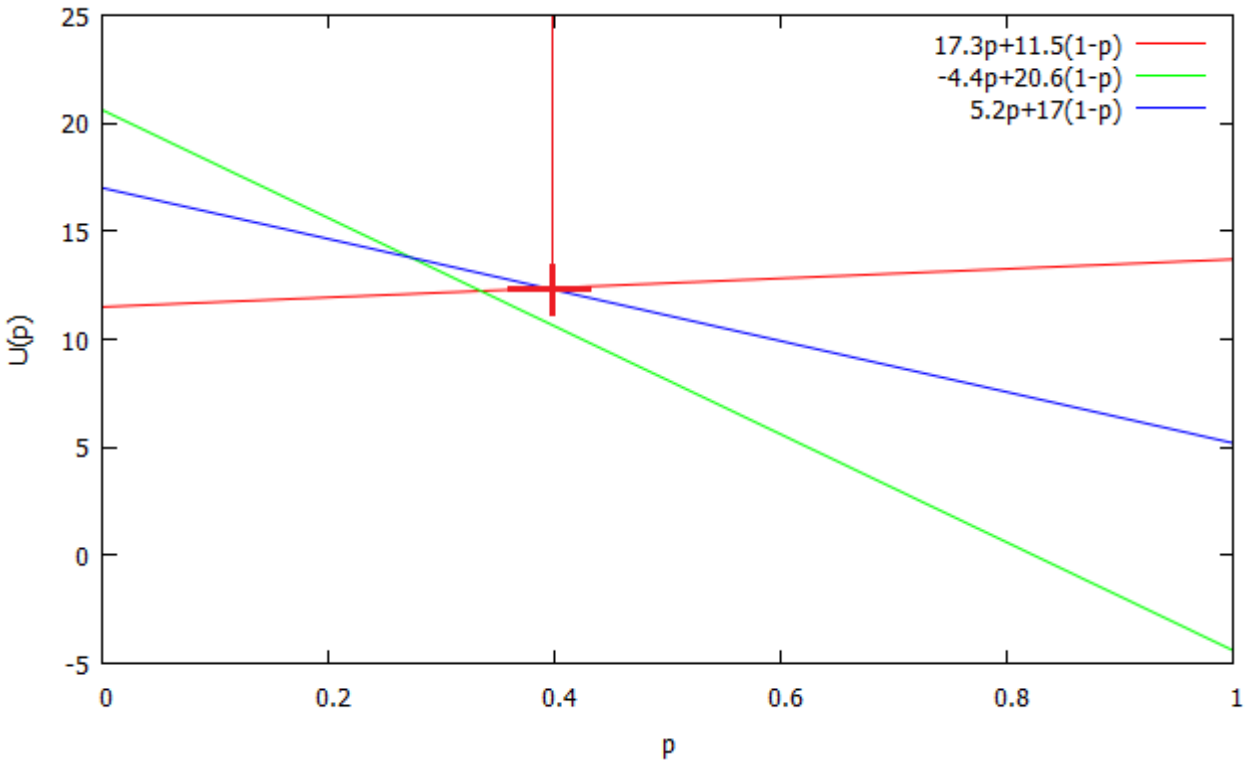
$$5\mathrm{p}$$

Ezeket a függvényeket ábrázoltam a [0:1] intervallumon. A sorjátékos biztonsági stratégiát szeretne felépíteni, vagyis feltételezi, hogy minden *p*-jére a neki legrosszabb válasz fog érkezni, vagyis a lineáris függvények alsó burkolóját kell tekinteni, és ezek maximumát venni. Ezt bejelöltem a grafikonon egy piros kereszttel. Az ehhez tartozó stratégia lesz a sorjátékos biztonsági stratégiája. Az ábra:



Látszik az is, hogy a piros vonal nem járul hozzá a burkolóhoz, azaz nem racionaliálható egyetlen kevert stratégiára sem: dominált stratégia. Nem létezik olyan *p*, amire legjobb válasz lenne.

Játék a tenger ellen: az óceán *p* valószínűséggel áramlik, (1-*p*) valószínűséggel nem. Az órán vett mátrix alapján *p* függvényében a halászok kifizetése a különböző tiszta stratégiáikra p függvényében:



Itt a felső burkolót kell nézni, mert (ha játékosnak teklintjük), az óceán "állítja be" a kevert stratégiát, így ő a maximumokat minimalizálja. Ebből az jön ki, hogy kb. 40% valószínűséggel fog áramlani.

6. Peloponésszoszi háború

Az athéniak lényegében az mondták a mélosziaknak, hogy gyengék lévén csak azt tudják elérni, amit az erősek nem evszenk el tőlük, és ezt próálhatják maximalizálni. Vagyis a győztes fél nem nullázza le teljesen a vesztest, és a vesztes közdhet reális célokért. Ez megfelel annak, hogy szigorúan versengő játéknál (mint a háború) a kevert stratégiákkal a játékosok próbálják maximalizálni a kifizetéseiket, és az egyensúlyban mindenkinek jut valami. Az athéniak azt javasolták, hogy a mélosiak ezért küzdjenek, ne pedig a győzelemért, mert azt úgysem kaphatják meg.

7. Monty Hall, Duel, Russian Roulette, End Game in Poker

Az első feladathoz teljesen hasonlóan az eliminálások az említett játékokban:

Monty Hall:

	1	**3**
(Sw,Sw)	2/3	2/3
(Sw,St)	2/3	1/3
(St,Sw)	1/3	2/3
(St,St)	1/3	1/3

	1	**3**
(Sw,Sw)	2/3	2/3

Alice-nak csak az **(Sw,Sw)** stratégiája marad, mert az dominál mindent. Monty Hall ezután indifferens a fennmaradó stratégiái között.

Duel:

	F	**WF**	**WW**
F	(0,1)	(0,1)	(0,1)
WF	(16/25, 9/25)	(10/25, 15/25)	(10/25, 15/25)
WWF	(16/25, 9/25)	(4/25, 21/25)	(20/25, 5/25)
WWW	(16/25, 9/25)	(4/25, 21/25)	(0,1)

	F	**WF**	**WW**
WF	(16/25, 9/25)	(10/25, 15/25)	(10/25, 15/25)
WWF	(16/25, 9/25)	(4/25, 21/25)	(20/25, 5/25)
WWW	(16/25, 9/25)	(4/25, 21/25)	(0,1)

	WF	**WW**
WF	(10/25, 15/25)	(10/25, 15/25)
WWF	(4/25, 21/25)	(20/25, 5/25)
WWW	(4/25, 21/25)	(0,1)

	WF	**WW**
WF	(10/25, 15/25)	(10/25, 15/25)
WWF	(4/25, 21/25)	(20/25, 5/25)

	WF
WF	(10/25, 15/25)
WWF	(4/25, 21/25)

	WF
WF	(10/25, 15/25)

A stratégiák (egyértelmű!) eliminálása után egy darab stratégiapár marad az oroszok párbajában.

Russian Roulette

a = 0,25, b = 0,55

	DDD		ADD		AAD		AAA	
DDD	0,25	1,00	0,25	1,00	0,25	1,00	0,25	1,00
ADD	0,83	0,63	0,33	0,83	0,33	0,83	0,33	0,83
AAD	0,83	0,63	0,67	0,61	0,42	0,67	0,42	0,67
AAA	0,83	0,63	0,67	0,61	0,50	0,59	0,50	0,50

	DDD		ADD		AAD		AAA	
AAA	0,83	0,63	0,67	0,61	0,50	0,59	0,50	0,50

	DDD	
AAA	0,83	0,63

Itt az eliminálás sorrendje mehetne másképpen is, de az eredmény egyértelmű.

a = 0,25, b = 0,25

	DDD		ADD		AAD		AAA	
DDD	0,25	1,00	0,25	1,00	0,25	1,00	0,25	1,00
ADD	0,83	0,38	0,33	0,83	0,33	0,83	0,33	0,83
AAD	0,83	0,38	0,67	0,46	0,42	0,67	0,42	0,67
AAA	0,83	0,38	0,67	0,46	0,50	0,54	0,50	0,50

	AAD	
DDD	0,25	1,00
ADD	0,33	0,83
AAD	0,42	0,67
AAA	0,50	0,54

	AAD	
AAA	0,50	0,54

Itt is kétféle sorrendben lehet eliminálni a stratégiákat, de megintcsak ugyanaz az eredmény, ami mellesleg különbözik az előző esettől.

End Game in Poker

	b	f
(b,b)	-3/2	1
(b,c)	0	-1/2
(c,b)	-2	1
(c,c)	-1/2	-1/2

	b	f
(b,b)	-3/2	1
(b,c)	0	-1/2

A sorjátékos **c**-vel kezdődő stratégiái domináltak. Ez azt jelenti, hogy nyerő lap esetén megéri tétet tenni. A fennmaradó 2 x 2-es mátrix már nem egyszerűsíthető. Könnyen belátható, hogy egyensúly csak kevert stratégiák esetén lehet. Ez azt jelenti, hogy a pókerben megéri kiszámíthatatlanul játszani, megéri blöffölni.