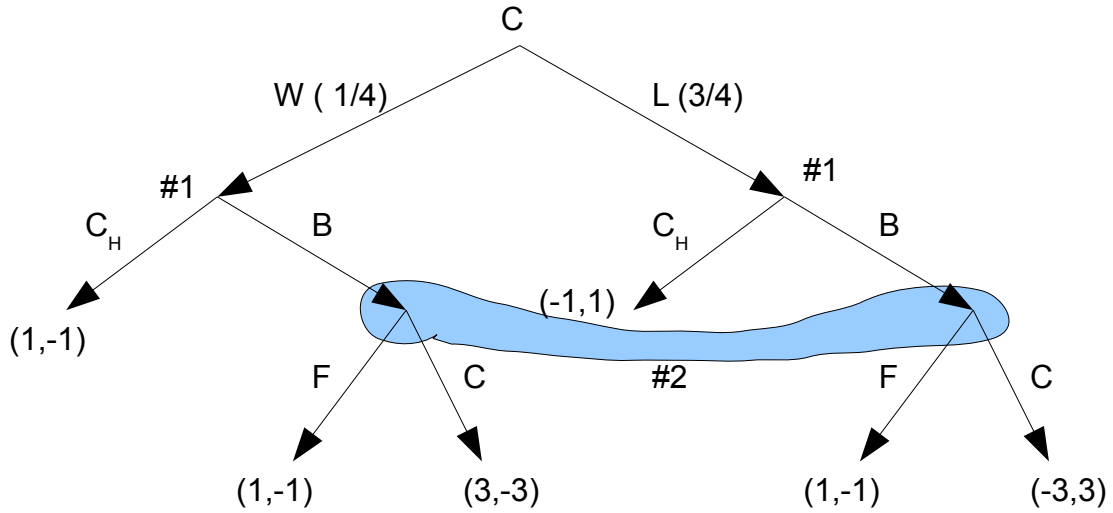
1. Basic Endgame in Poker

A játék extenzív formája: C a szerencse játékos, W a nyerő, L a rossz lap kézbekapását jelenti, C_H a check, B a tét, F a dobás és C a hívás.



Ugyanezekkel a jelölésekkel a stratégiai formához tartozó segédtáblázat, ami adott stratégiaprofilok mellett a kimenetelek valószínűségeit tartalmazza ((W,L) sorrendben az 1-es játékos stratégiái):

Z/S_i	**(C_HC_H, F)**	**(C_HC_H, C)**	**(C_HB, F)**	**(C_HB, C)**	**(BC_H, F)**	**(BC_H, C)**	**(BB, F)**	**(BB, C)**
WC_H (1, -1)	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0	0
WBF (1,-1)	0	0	0	0	1/4	0	1/4	0
WBC (3, -3)	0	0	0	0	0	1/4	0	1/4
LC_H (-1, 1)	3/4	3/4	0	0	3/4	3/4	0	0
LBF (-1, 1)	0	0	3/4	0	0	0	3/4	0
LBC (-3, 3)	0	0	0	3/4	0	0	0	3/4

Ez alapján a stratégiai forma:

	(C_HC_H)	**(C_HB)**	**(BC_H)**	**(BB)**
F	(-1/2, 1/2)	(1/4, -1/4)	(6/4, -6/4)	(-3/2, 3/2)
C	(-1/2, 1/2)	(2, -2)	(1, -1)	(1, -1)

2. An Extensive Game Exercise

(a) A feladatsorban leírt játék nem tökéletes információs, mert információs halmazok vannak benne, amik nem csak egy történelmet tartalmaznak.

A játék nem is teljes emlékezetes, a következők miatt. Vezessük be a következő jelöléseket: a szerencse (C) egyik (a feladatsor gráfján fölső) lépését jelöljük t-vel, a másikat b-vel. Ekkor az infomációs halmazokra vezessük be ezeket a jelöléseket:

$$I_I=\{I_1=\{(t),(b,d)\},I_2=\{(t,d,d),(b,d,d,D)\}\}$$

Az egyes játékos tapasztalati halmazai:

$$X_I((t))=I_1 \quad , \quad X_I((b,d))=I_1$$
$$X_I((t,d,d))=(I_{1,}d,I_2) \quad X_I((b,d,d,D))=(I_{1,}d,I_2)$$

Mivel a játék játékos szimmetrikus, a t-b lépések cseréje megegyezik a két játékos felcserélésével, vagyis a fent elmondottak igazak a második játékosra is, csak t helyett b, b helyett t lépésekkel.

Látszik, hogy az adott információs halmazokon belüli történelmekhez rendelt tapasztalatok megegyeznek, vagyis a játék teljes emlékezetes.

(b) A játék stratégiai formája. (I_1, I_2 sorrendben a stratégiák):

		II			
		dU	**dD**	**uU**	**uD**
I	**dU**	(5/2, 5/2)	(5, 1/2)	(5/2, 1)	(5/2, 1)
	dD	(1/2, 5)	(4,4)	(5/2, 1)	(5/2, 1)
	uU	(1, 5/2)	(1, 5/2)	(3/2, 3/2)	(3/2, 3/2)
	uD	(1, 5/2)	(1, 5/2)	(3/2, 3/2)	(3/2, 3/2)

Ezen is látszik a játékosszimmetria, hiszen a mátrix szimmetrikus, és az is látszik, hogy a stratégiai forma redukálható, ugyanis az uU és uD stratégiák midnig ugyanazt eredményezik, mert u lépés esetén azonnal véget ér a játék.

(c) Viselkedési stratégia: két ponthoz két-két lehetőséget kell figyelembe vennünk:

$$\sigma_{II}(uU)=\frac{1}{3} \qquad \sigma_{II}(dD)=\frac{2}{3}$$, a többire 0.

Definíció szerint:

$$\beta_2(u|\{(b),(t,d)\})=\frac{\pi_2((b,u))}{\pi_2((b))}=\frac{1}{3}$$, vagyis $$\beta_2(d|\{(b),(t,d)\})=\frac{2}{3}$$, és

$$\beta_2(U|\{(b,d,d),(t,d,d,D)\})=\frac{\pi_2((t,d,d,U))}{\pi_2((t,d,d))}=\frac{0}{2/3}=0$$, és

$$\beta_2(D|\{(b,d,d),(t,d,d,D)\})=\frac{\pi_2((t,d,d,D))}{\pi_2((t,d,d))}=\frac{2/3}{2/3}=1$$

3. Forgethful Players

(a) Az egyes játékos (nem triviális) információs halmaza:

$$I_1=\{(A,b),(B,d),(B,e,b)\}$$

Ehhez tartozó tapasztalati halmazok:

$$X_1((A,b))=(\{\emptyset\},(A),\{(A,b),(B,d),(B,e,b)\})$$
$$X_1((B,d))=(\{\emptyset\},(B),\{(A,b),(B,d),(B,e,b)\})$$
$$X_1((B,e,d))=(\{\emptyset\},(B),\{(A,b),(B,d),(B,e,b)\})$$

A kettes játékos információs halmazai, a hozzájuk tartozó tapasztalati halmazokkal:

$$I_{2a}=\{(A),(B,e)\}$$
$$X_2((A))=(\{(A),(B,e)\})$$
$$X_2((B,e))=(\{(A,c),(B)\},(e),\{(A),(B,e)\})$$

$$I_{2a}=\{(A),(B,e)\}$$
$$X_2((A,c))=(\{(A),(B,e)\},(c),\{(A,c),(B)\})$$
$$X_2((B,e))=(\{(A,c),(B)\})$$

A játékosok sokat felejtenek: az 1-es játékos elfelejti, hogy mit döntött, a második azt is elfelejti, hogy döntött-e. A játék se nem teljes információs, se nem teljes emlékezetes.

(b) A játék stratégiai formája. Jelölések: az 1-es játékos esetében $(\emptyset, I_1)$, a második átékos esetében (I_{2a}, I_{2b}) sorrendben értendőek a stratégiák. A kifizetések az 1-es játékos kifizetései, mivel a játék nulla összegű.

		2					
		ad	**ae**	**bd**	**be**	**cd**	**ce**
1	**AD**	0	0	1	1	1	-1
	AE	0	0	-1	-1	1	-1
	BD	0	2	0	1	0	1
	BE	-2	2	-2	2	-2	1

4. Mixed and Behavioral Strategies

A viselkedési stratégiákat definíció szerint feltételes valószínűségekkel kell számolni, ugyanis egy adott pontban feltétel, hogy "odáig eljussunk", vagyis az adott pontbeli történelemmel konzisztens stratégiákat feltételeznünk kell, és az adott döntéssel konzisztens további történelmek valószínűségeit össze kell adni. Ez alapján:

$$p(A)=0{,}5+0=0{,}5 \quad , \quad p(B)=0{,}4+0{,}1=0{,}5 \quad ,$$

$$p(l)=\frac{\pi((A,M,l))}{\pi(A,M)}=\frac{0{,}5}{0{,}5+0}=1 \quad , \quad p(r)=\frac{\pi((A,M,r))}{\pi(A,M)}=\frac{0}{0{,}5+0}=0$$

A két utóbbit az R ágon is számolhattuk volna.

5. Monty Hall - To Switch or Not To Switch

(a) A játék stratégiai formájához alkotott segédtáblázat, ami a stratégiaprofilok esetén mutatja a kimenetelek valószínűségét Alice esetén $(\{(1,3),(2,3)\},\{(2,1),(3,1)\})$ sorrendben jelölve a stratégiákat. A kifizetések Alice kifizetései, ha a nyeremény megnyerése (W) esetén 1, egyébként 0 a kifizetés. Az alsó sorban összeszedtem a stratégiaprofilokhoz Alice nyereményének várható értékét.

Z/S$_i$	**(st,st),1**	**(st,st),3**	**(st,sw),1**	**(st,sw),3**	**(sw,st),1**	**(sw,st),3**	**(sw,sw),1**	**(sw,sw),3**
1,3,St (L)	1/3	1/3	0	0	1/3	1/3	0	0
1,3,Sw (W)	0	0	1/3	1/3	0	0	1/3	1/3
2,3,St (W)	0	1/3	0	0	0	1/3	0	0
2,3,Sw (L)	0	0	0	1/3	0	0	0	1/3
2,1,St (W)	1/3	0	1/3	0	0	0	0	0
2,1,Sw (L)	0	0	0	0	1/3	0	1/3	0
3,1,St (L)	1/3	1/3	1/3	1/3	0	0	0	0
3,1,Sw (W)	0	0	0	0	1/3	1/3	1/3	1/3
Várh.é.	*1/3*	*1/3*	*2/3*	*1/3*	*1/3*	*2/3*	*2/3*	*2/3*

Ez alapján a stratégiai forma:

		MH	
		1	**3**
A	**st,st**	1/3	1/3
	st,sw	1/3	2/3
	sw,st	2/3	1/3
	sw,sw	2/3	2/3

Az sw,sw stratégia dominálja a többit, tehát Alice-nak minden esetben megéri váltania.

(b) Az órai jelöléseket használva: Alice azt gondolja, hogy Monty Hall 1-p, és p valószínűségekkel választ a 3 és 1 stratégiák közül. Tegyük fel most, hogy Alice a $\{(1,3),(2,3)\}$ információs halmazban van. $P(\{(1,3)\})=1/3$ $P(\{(2,3)\})=1/3\cdot(1-p)$
Ekkor a következő valószínűségeket tulajdonítja az egyes ágaknak:

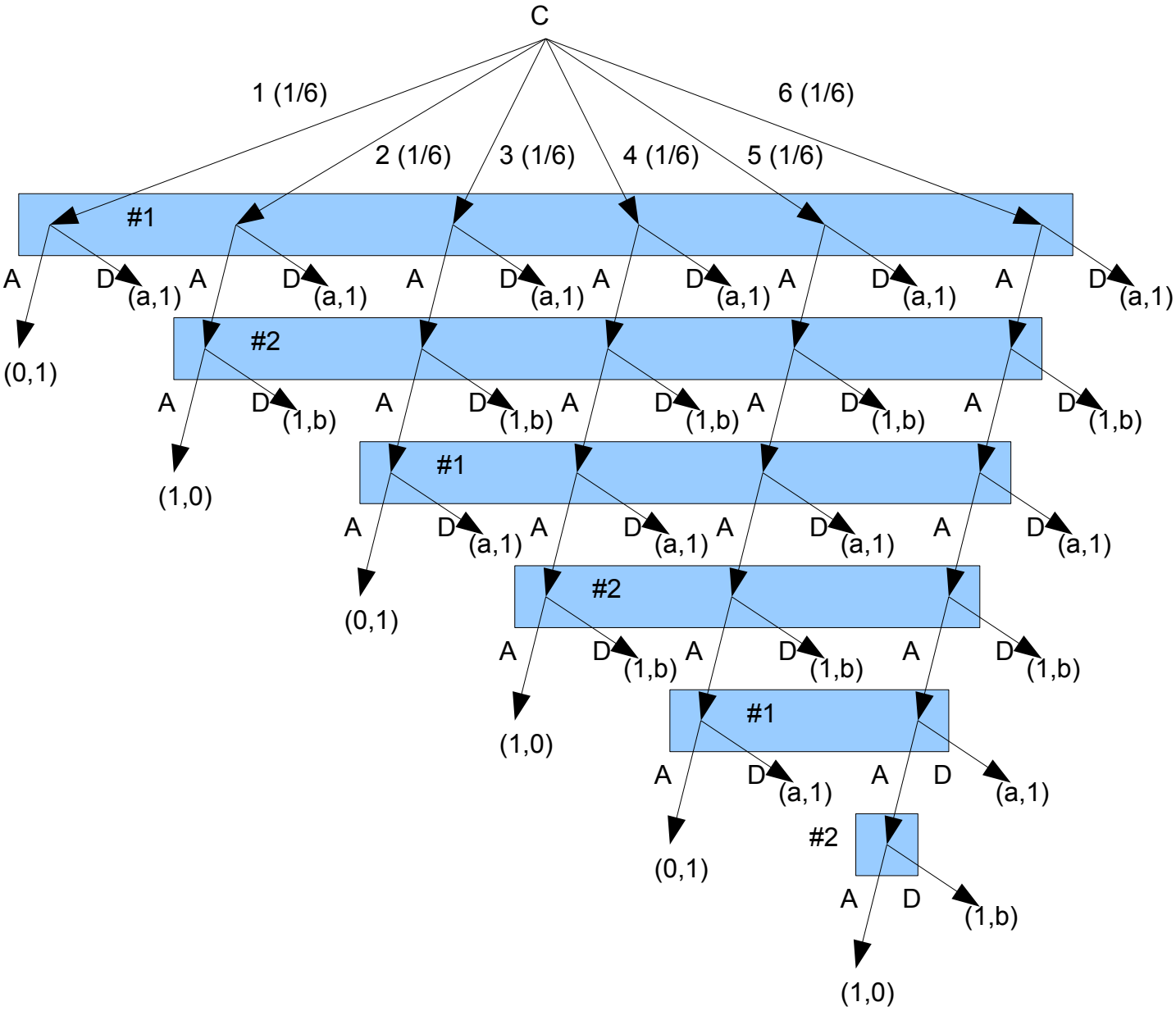
$$P(\{(1,3)\}|\{(1,3),(2,3)\})=\frac{1/3}{1/3+1/3\cdot(1-p)}=\frac{1}{2-p}$$

$$P(\{(2,3)\}|\{(1,3),(2,3)\})=\frac{1/3\cdot(1-p)}{1/3+1/3\cdot(1-p)}=\frac{1-p}{2-p}$$

Alice minden esetben valószínűbbnek tartja, hogy az (1,3) ágon van (kivéve, ha p = 0). Ez esetben megéri váltania.

6. Russian Roulette

(a) A játék extenzív formában:



A fenti jelölésben C a szerencse, és a lépései azt jelentik, hogy hanyadik helyre kerül a golyó, a kilövés sorrendjét figyelembe véve.

A játékosok információs halmazainak halmazai:

$$I_1=\{\{1,2,3,4,5,6\},\{(3,A,A),(4,A,A),(5,A,A),(6,A,A)\},\{(5,A,A,A,A),(6,A,A,A,A)\}\}$$
$$I_2=\{\{(2,A),(3,A),(4,A),(5,A),(6,A)\},\{(4,A,A,A),(5,A,A,A),(6,A,A,A)\},\{(6,A,A,A,A,A)\}\}$$

(b) AAA, AAD esetén a szerencse játékoson múlik a kimenetel. Az első játékos az 1,3,5 esetekben nyer (W). Mivel a szerencse minden döntésének valószínűsége 1/6, ezért ezen tiszta stratégiák esetén az 1-es játékos 1/2 eséllyel nyer, azaz az esetek felében.

DDD esetén mindenképpen a 2-es játékos nyer. Hogy ezeket az eseteket jobban tudjuk kezelni, be kell vezetni a hasznossági függvényeket, amivel már meghatározhatjuk a játékosok kockázathoz való viszonyát. (A fenti gráfban már jelöltem a kifizetéseiket.)

(c) A játék stratégiai formában. Elvileg mindkét játékosnak 8 stratégiája van, így 64 cella. Azonban (hasonlóan a párbajozó oroszokhoz) ezek leredukálhatók 4 stratégiára, mivel minden D lépés a játék végét eredményezi, így pédául az ADD és ADA stratégiák között nincs értelme ülönbséget tenni (az időzítés játéka). Én az egyszerűség kedvéért már csak a leegyszerűsített mátrixot írom fel.

Tovább könnyít életünkön az az észrevétel, hogy a 4 x 4 = 16 cellából is sok ugyanolyan hasonló okokból: ugyanis, ha az egyik játékos megfutamodik (D), akkor a további lépésekben nem csak az ő, de a másik játékos lépései sem számítanak. Például az (AD, AAD) és (AD, AAA) stratégiapárok ugyanazokat a kifizetéseket fogják eredényezni. Így a 16 esetből már csak 7 maradt (ettől a mátrixunk nem lett kisebb, csak sok eleme ugyanaz).

Sorra a számítások (...-tal jelölve a stratégiák "mindegy" részét):

(D, ...) $(a,1)$

(A..., D) $\frac{1}{6}(0,1)+\frac{5}{6}(1,b)=\left(\frac{5}{6},\frac{1+5\mathrm{b}}{6}\right)$

(AD, A...) $\frac{1}{6}(0,1)+\frac{5}{6}\left(\frac{1}{5}(1,0)+\frac{4}{5}(a,1)\right)=\left(\frac{1+4\mathrm{a}}{6},\frac{5}{6}\right)$

(AA..., AD) $\frac{1}{6}(0,1)+\frac{5}{6}\left(\frac{1}{5}(1,0)+\frac{4}{5}\left(\frac{1}{4}(0,1)+\frac{3}{4}(1,b)\right)\right)=\left(\frac{2}{3},\frac{3\mathrm{b}+2}{6}\right)$

(AAD, AA...) $\frac{1}{6}(0,1)+\frac{5}{6}\left(\frac{1}{5}(1,0)+\frac{4}{5}\left(\frac{1}{4}(0,1)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}(1,0)+\frac{2}{3}(0,1)\right)\right)\right)=\left(\frac{1+a}{3},\frac{2}{3}\right)$

(AAA, AAD) $\frac{1}{6}(0,1)+\frac{5}{6}\left(\frac{1}{5}(1,0)+\frac{4}{5}\left(\frac{1}{4}(0,1)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}(1,0)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(0,1)+\frac{1}{2}(1,b)\right)\right)\right)\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{b}{6}\right)$

(AAA, AAA) $\frac{1}{6}(0,1)+\frac{5}{6}\left(\frac{1}{5}(1,0)+\frac{4}{5}\left(\frac{1}{4}(0,1)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}(1,0)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(0,1)+\frac{1}{2}(1,0)\right)\right)\right)\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

Ezek alapján a stratégiai forma:

		2			
		D	**AD**	**AAD**	**AAA**
1	**D**	(a,1)	(a,1)	(a,1)	(a,1)
	AD	(5/6, (1+5b)/6)	((1+4a)/6,5/6)	((1+4a)/6,5/6)	((1+4a)/6,5/6)
	AAD	(5/6, (1+5b)/6)	2/3, (3b+2)/6)	((1+a)/3,1/3)	((1+a)/3,1/3)
	AAA	(5/6, (1+5b)/6)	3/3, (3b+2)/6)	(1/2,(1/2+b/6))	(1/2,1/2)