1. Mating game

A nőstény lépéseit jelöljük így: a *coy* viselkedés legyen c, a *fast* f, a hímnél a *faithful* f, a *philandering* pedig p. A játszmában 4 lehetséges kimenetel van: cf, cp, ff és fp. Sorra a kifizetések:

– **cf**: a nőstény elvárja az udvarlásti procedúrát, és a hím belemegy. Mindkettejüknek lesz utódja (+15), de vesztenek a hosszadalmas udvarlás miatt (-3), és megosztják a nevelés terhét (-10). Így ha (F,M) formában írjuk, a végüsszeg: (2,2).

– **cp**: a nőstény elvárja a procedúrát, de a hím nem megy bele, így mindketten utód nélkül maradnak. Energiáikat sem köti le semmi. Kifizetéseik: (0,0).

– **ff**: hasonlít a cf esetre, csak elmarad az udvarlás, így a végösszeg itt is szimmetrikus, csak magasabb: (5,5).

– **fp**: udvarlás nincs, a gének továbbítása után a hím elvégezte feladatátés elhagyja a nőstényt. Mindkettejüknek lesz utódja, de egyedül a nőstény neveli fel. Kifizetéseik: (-5,15).

–

(a) A játék leírása stratégiai formában:

		F	
		c	f
M	f	(2,***2***)	(***5***,5)
	p	(***0***,0)	(-5,***15***)

(b) A legjobb válasz függvények (félkövér, dőlt betűvel jelezve):

Hím: B(c) = f, B(f) = p

Nőstény: B(f) = f, B(p) = c

Vagyis nincsen egyensúlyi állapot: ha az egyik "játékos" a legjobb válaszát adja, akkor a másik változtatni fog, és így tovább.

2. Colonel Blotto and Count Baloney

A következő jelölést használom mindkét fél stratégiájára: pl. x-y azt jelenti, hogy az egyik erődhöz x, a másikhoz y csapatot küld az adott fél. A táblázatban külön feltüntettem Blotto kifizetéseit mindkét erődre, és vastag betűvel az összeget (ez a kifeizetése Blottonak, Baloney-nak pedig az ellentettje).

(a) A játék stratégiai formában:

		Baloney			
		3-0	2-1	1-2	0-3
Blotto	4-0	4+0=***4***	3-1=***2***	2-1=***1***	1-1=***0***
	3-1	0+1=***1***	3+0=***3***	2-2=***0***	1-2=***-1***
	2-2	-3+1=***-2***	0+2=***2***	2+0=***2***	1-3=***-2***
	1-3	-2+1=***-1***	-2+2=***0***	0+3=***3***	1+0=***1***
	0-4	-1+1=***0***	-1+2=***1***	-1+3=***2***	0+4=***4***

(b) A játék nem lehet játékos-szimmetrikus, eleve mivel különböző számú stratégiája van a játékosoknak. A játék stratégia-szimmetrikus. Ennek muszáj is így lennie, hiszen a probléma eleve szimmetrikus a két erőd felcserélésére.

(c) A játék szimmetrikus a következő műveletekre: Blotto 3-1 és 1-3 stratégiájának felcserélése, emellett Baloney 3-0 és 0-3, valamint 2-1 és 1-2 felcserélése. Blotto 4-0 és 0-4 felcserélése, közben Baloney ugyanezen stratégiáinak felcserélése. Ugyanezt megscinálhatjuk Baloney szemszögéből is (pl. 2-1 és 1-2 felcserélése, közben Blotto stratégiáinak "tükrözése" a 2-2 stratégiára). Ezek a műveletek megfelelnek a két erőd kicserélésének. A játék mátrixa mellesleg az órán vett mátrix a stratégiai szimmetria bemutatására.

Kevert stratégiák esetén, egyensúlyban az egyes játékosok esetén meg fog egyezni a valószínűség a következő párokra: 4-0 és 0-4, 3-1 és 1-3, 3-0 és 0-3, valamint 2-1 és 1-2.

3. Morra

(a) A játék stratégiai formában, (S,O) kifizetések szerint (a stratégiák jelölése: mutatott ujjak száma - mondott ujjak száma):

		O			
		1-1	1-2	2-1	2-2
S	1-1	(0,0)	(2,0)	(0,3)	(0,0)
	1-2	(0,2)	(0,0)	(0,0)	(3,0)
	2-1	(3,0)	(0,0)	(0,0)	(0,4)
	2-2	(0,0)	(0,3)	(4,0)	(0,0)

(b) Látszik, hogy ha a mátrixot transzpontáljuk, valamint felcseréljük a kifizetéseket, ugyanazt kapjuk. Ez a játékosok felcserélésének felel meg. A játék tehát játékos-szimmetrikus. Egyensúlyban az egyes stratégiákhoz mindkét játékos ugyanolyan valószínűségeket fog választani.

4. O'Neill kártyajátéka

(a) A játék stratégiai formában, ahol csak Colin kifizetéseit írtam a táblázatba az egyszerűség kedvéért:

		C: A	C: K	C: Q	C: J
R	A	0	1	1	1
	K	1	1	0	0
	Q	1	0	1	0
	J	1	0	0	1

(b) A játék mátrixa szimmetrikus, de a játékosok cseréjekor a kifizetéseket is ki kell cserélni, és erre a műveletre már nem invariáns, vagyis a játék nem játékos-szimmetrikus.

Ellenben a játék stratégia-szimmetrikus a K, Q és J stratégiák közül bármelyik pár cseréjére, ha a másik játékosnál ugyanígy megcseréljük ugyanezt a két stratégiát. Ez azért van, mert ez a három kártyalap ugyanolyan szerepet tölt be a játékban, egyedül az ász van kitüntetve. Kevert stratégiák esetén egyensúlyban a játékosok ezt a három lapot ugyanolyan valószínűséggel fogják felmutatni.

5. Pénzfeldobás és kő-papír-olló

A játékok stratégiai formában (a kifizetések az oszlopjátékosé):

		O: F	O: I
S	F	-1	1
	I	1	-1

		O: K	O: P	O: O
S	K	0	1	-1
	P	-1	0	1
	O	1	-1	0

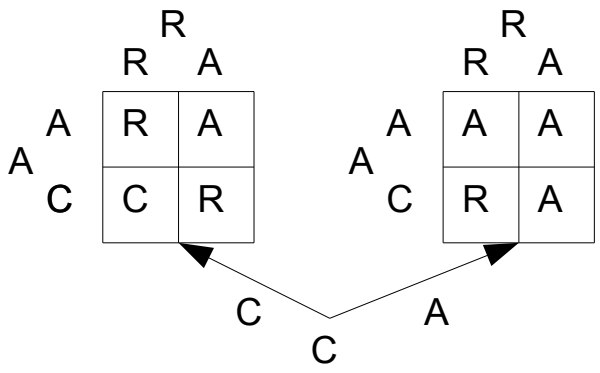
A pénzfeldobós játék stratégia-szimmetrikus a két stratégia cseréjére, ha a másik játékosnál is kicseréljük a két stratégiát. A kő-papír-olló a három stratégia ciklikus cseréjére szimmetrikus, szintén, ha mindkét játékosnál ugyanazt a cserét hajtjuk végre. Ennek a játéknak a mátrixa antiszimmetrikus, vagyis játékos-szimmetrikus is (mellesleg e két tulajdonság teljesülése miatt ez a mátrix a kétindexes Levi-Civita szimbólum mátrixa).

Ha nem tévedek, ezek a másod-, és harmadrendű ciklikus csoporttal írhatók le.

Mindkét játék esetén a szimmetriákból jön, hogy kevert stratégiák esetén, egyensúlyban az összes stratégiához tartozó valószínűségek meg fognak egyezni. Ez esetben ezért pontosan meg lehet mondani, hogy a péntfeldobós játéknál ez 1/2, a kő-ppír-olló esetében ez 1/3 lesz.

6. Szavazás

Értelemszerű számolásokkal a játék ábrázolása stratégiai formában:



7. Tisztán versengő játékok

(a) Legyen a játék három kiemenetele: *a*, *b* és *c*. Az egyes, és kettes játékosok hasznossági függvényeit jelölje u_1 és u_2. A tisztán versengő ez esetben ezt jelenti:

$$u_1(o_1) \geq u_1(o_2) \Leftrightarrow u_2(o_1) \leq u_2(o_2), \forall o_{1,} o_2$$

ahol o_1 és o_2 kimenetelek. Olyan hasznossági függvény párt kell találnunk, ami teljesíti ezt a feltételt, valamint azt, hogy ha a $(0,1,0)$, és az $(1/2,0,1/2)$ valószínűségeloszlás szerint jönnek a kimenetelek, akkor mindkettejük a $(0,1,0)$ -t részesíti előnyben. Ezt így lehet írni:

$$\frac{u_i(a)+u_i(c)}{2} < u_i(b), i=1,2$$

Az első kritériumot így is lehet teljesíteni (de máshogy is):

$$u_1(a) < u_1(b) < u_1(c) \quad \text{és} \quad u_2(a) > u_2(b) > u_2(c)$$

Ez azt jelenti, hogy találnunk kell egy $a \to b \to c$ értelemben monoton növő u_1, és csökkenő u_2 függvényt, amik konkávak. Egy jó példa ezekre:

$$\begin{array}{lll} u_1(a)=0 & u_1(b)=3 & u_1(c)=4 \\ u_2(a)=4 & u_2(a)=3 & u_2(c)=0 \end{array}$$

(b) A két kimenetel legyen *a* és *b*. A bizonyítást levezetjük két játékosra, de akármennyire be lehet látni, ha páronként igaz. Szigorúan versengő játék esetén az általános eset megszorítása nélkül kiköthetjük:

$$a \leq_1 b \Leftrightarrow a \geq_2 b$$

(A relációjelek itt (és az indexelt esetekben) preferenciarelációt jelentenek.) Tételezzük fel, hogy a kimeneteleken értelmezett valószínűségeloszlások közül ugyanazt preferálják. Ezt megszorítások nélkül írhatjuk ilyen alakban:

$$(\alpha a, (1-\alpha)b) \leq_1 (\lambda a, (1-\lambda)b) \quad , \quad (\alpha, \lambda \in [0,1])$$

$$(\alpha a, (1-\alpha)b) \leq_2 (\lambda a, (1-\lambda)b)$$

A valószínűségeloszlásokon értelmezett hasznossági függvénnyel kifejezve:

$$U_2(\alpha a, (1-\alpha)b) \leq U_2(\lambda a, (1-\lambda)b)$$

A kimeneteleken értelmezett hasznossági függvénnyel kifejezve:

$$\alpha u_2(a) + (1-\alpha) u_2(b) \leq \lambda u_2(a) + (1-\lambda) u_2(b)$$

Átrendezve az egyenlőtlenséget:

$$(\alpha - \lambda) u_2(a) \leq (\alpha - \lambda) u_2(b)$$

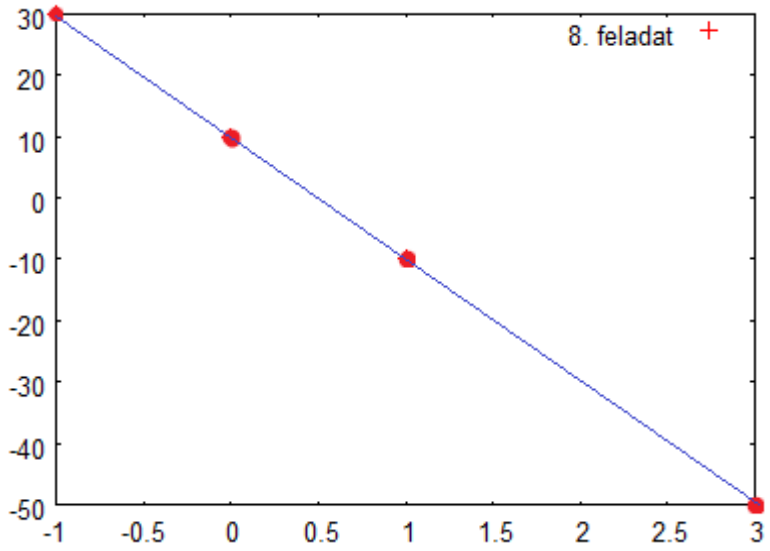
Leosztva $(\alpha - \lambda)$ -val kapjuk:

$$u_2(a) \leq u_2(b)$$

Ez pedig ellentmond a $a \geq_2 b$ kifejezésnek, amit az elején kikötöttünk (a teljesen indifferens esetet kivéve persze). Ellentmondásra jutottunk, tehát két kimenetel esetén a szigorúan versengő játékok bármilyen valószínűségeloszlásra is szigorúan versengőek lesznek.

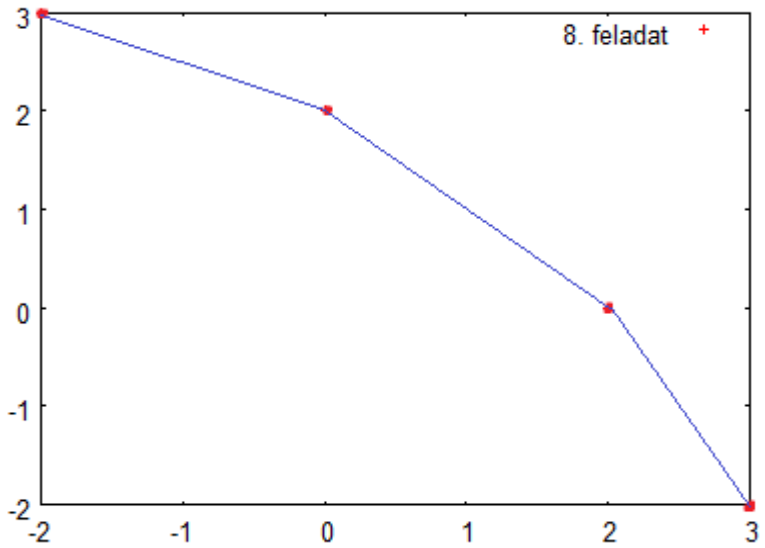
8. Zérus összegű játékok

Az első mátrix számpárjait ábrázolva láthatjuk, hogy egy egyenesre illeszkednek.



Ez azt jelenti, hogy egy pozitív affin transzformációval egy origón átmenő, -1 meredekségű egyenessé transzformálhatjuk, vagyis a játék zérus összegű. (*x*,*y*) jelölést használva a (0,10) számpárból kiindulva vonjunk ki *y*-ból 10-et! Ezzel az origóba toltuk az egyenesünket. Ekkor van egy (1,-20) számpárunk. *y*-t osszuk le 20-szal. Vagyis *y*-on on a következő transzformációt kell végrehajtani:

$$y \to \frac{y-10}{20} = \frac{y}{20} - 1/2$$

Ellenőrizhetjük is egy harmadik számpáron: $(3,-50) \to (3,-3)$. Ez valóban jó lesz.

A második mátrix esetén a számokból és a grafikonból is látszik, hogy a feladatban megadott mátrix számpárjai nem illeszkednek egy egyenesre, és mivel a pozitív affin transzformáció egyenestartó, nem tudjuk egy -1 meredekségű, origón átmenő egyenessé transzformálni. Ez a játék nem zérus összegű.