Elemi Játékelmélet

Rudolf Ádám
RUAQAAT.ELTE
2010 őszi félév

Az előadás során betekintést nyerhettünk a játékelméletbe, és megismertük annak matematikai alapjait. A játékelméletnek sok ága van, és sok ismeretterjesztő irodalom, előadás, stb. csak egy-egy ágával foglalkozik, például közkedvelt téma az evolúciós játékelmélet, ám nem részletezik, hogy konkrétan mi ez az ág, esetleg az sem világos, hogy egy speciális területtel van dolgunk. Az előadáson általánosan foglalkoztunk a játékelmélet alapjaival, és megtanultuk, hogy hogyan kell megfogalmazni a problémákat precízen a matematika nyelvén. Betekintést nyertünk pár szóban a tudományterület kezdeti történetébe is.

Az első ismert játékelméletinek nevezhető leírást a Talmudban találták meg, ami egy zsidó törvénygyűjtemény Kr.u. néhány száz évvel. Ebben javaslatok vannak azzal kapcsolatban, hogy hogyan osszuk el az örökséget, amik a mai játékelmélet szempontjából megvizsgálva korrekt és optimális ötletek. Ez azonban valószínűleg intuíció, vagy tapasztalat alapján lett megfogalmazva, így nem tekinthetjük a tudomány irodalmának.

James Waldegrave egy 1713-as levelében taglal egy stratégiát egy kártyajátékról, de a játékelmélet igazi megjelenésének dátumát 1944-re szokták tenni, amikor Neumann János és Oskar Morgenstern kiadták "*Theory of Games and Economic Behavior*" című cikküket, ugyanis a játékelmélet innentől kezdve vált a matematika ágává, aktív kutatási területté. Azóta több (közgazdasági) Nobel-díj született belőle, fontos például John Nash-é 1994-ben, amit részben a magyar Harsányi Jánossal megosztva kapott.

Habár a játékelméletet leginkább a matematika ágának tekintjük, a komplex rendszerek kutatásához, hálózatkutatáshoz hasonlóan inkább egy független dolog, ami alkalmazható rengeteg területen, például a közgazdaságtanban, a biológiában, politikában. Erősségét pont ez adja, valamint az, hogy a fizika legtöbb területével ellentétben nem "szétszedett" rendszereket vizsgál, és nem egy szereplőt tekint egy fix környezetben, hanem figyelembe veszi a környezet reakcióit, párhuzamos optimalizációt, versenyt, és ez elengedhetetlen a fent említett területeken.

A matematika legtöbb ágával ellentétben a játékelmélet művelése során olyan matematikai környezetet kell megalkotnunk, ami szorosan illeszkedik valamilyen konkrét valós problémához. Modellt kell alkotnunk. A modell függ attól, hogy milyen jellegű

játékról van szó: hány játékos játssza, párhuzamosan, vagy egymás után lépnek, a játék egyszeri, vagy pedig ismétlődő, a játékosok egymás ellen játszanak, vagy pedig összejátszanak, van-e szerepe a véletlennek, valamint a játékosok mennyit tudnak a játékról.

Mivel a modell a valóságnak egy leegyszerűsített, idealizált leképezése, ezért van értelme feltennünk a kérdést, hogy jogosan vonunk-e le következtetéseket a modell a alapján a valóságra vonatkozólag, másképp mondva, érvényes-e a modell, és ha igen, milyen esetekben?

Az úgynevezett "kis világ" elv mondja ki, hogy három kritériumnak kell teljesülnie, hogy a játékelméleti modellünk értelmes legyen: a játéknak aránylag egyszerűnek kell lennie, a játékosoknak legyen motivációja "jól" játszani, és a játékosok valamilyen szempontból legyenek jók. Ahol ezek teljesülnek, abban a "kis világban" érvényesek lesznek a következtetéseink. Tipikus példa erre egy társasjáték világa: a való életnél jóval egyszerűbb, letisztult és jól definiált problémákkal találkozunk. A bonyolult való életben már nehezebb ilyen tiszta, egyszerű "kis világokat" elkülöníteni, bár a második kettő kritérium általában teljesül: csak a játék összetettségével van gond. Ám ha nem érvényes a modellünk, a játékelmélet akkor is segít jobban megismerni, elemezni a problémát.

Ha tudunk modellt alkotni, és érvényes is, akkor hogyan fogjunk hozzá? Először a játék stratégiai formáját vettük: öt axiómát állítottunk. Az elsőben indexeltük a játékosokat, a másodikban halmazba szedtük a cselekvéseiket, és definiáltuk a lehetséges kimeneteleket, amik a játékosok cselekvésterein értelmezett Descartes szorzat volt. A harmadikban bevezettünk preferenciarelációkat, amiket a kimeneteleken értelmeztünk: ki mit szeret jobban. Ez sokszor jól meghatározható a matematikán kívüli témákból, de a matematika ezt axiómának látja. A preferenciarelációkat gyakran tudjuk reprezentálni a cselekvéstéren értelmezett függvényekkel. Feltettük, hogy a játékosok racionálisak, és ez köztudott. És végül feltettük, hogy mindenki mindent tud a játékról.

Jó példa erre az öltözködés az időjárás "ellen": két szereplő van: én, és az időjárás. Az én cselekvéseim: V, mint viszek kabátot, vagy N, mint nem viszek, az időjárás cselekvései pedig: J, mint jó idő lesz, vagy R, mint rossz idő lesz. A preferenciám: (J,N)>(J,V)>(R,V)>(R,N), az időjárásról pedig feltételezzük, hogy épp fordítva preferálja a kimeneteleket. Hogyan modellezzük a racionalitást? A kimenetelekhez számokat rendelünk a von Neumann-Morgenstern hasznossági függvény alapján. A játékosok célja a haszon, vagy kifizetés maximalizálása. Ha a véletlen is szerepet játszik, vagy kevert stratégiát használnak a játékosok (vagyis a tiszta stratégiáikat bizonyos valószínűséggel

variálják), akkor a játékosok célja a kifizetések várható értékének maximalizálása.

Most, hogy sikeresen modelleztük a játékokat, már megkérdezhetjük, hogy mi történik, ha a játék elkezd "játszódni". Van-e valamilyen egyensúlyi állapot?

Nem feltétlen létezik, de sok esetben igen. Példaként vettünk egy korai játékot: Cournot piac játékát 1838-ból. Ez józan ésszel megoldható. Kétszereplős játék, amiben mindkét játékos egy cég, akik ugyanazt a terméket árulják. Ha q_1 és q_2 az általuk termelt mennyiség, p a termék ára, akkor $q_1 + q_2 + p = M$, ami állandó. Az előállítási költség rögzített, a profit a bevétel (eladott mennyiség szorozva az árral) és a kiadás (eladott mennyiség szorozva az előállítási költséggel). Mindketten ezt próbálják maximalizálni. Egymás után szimultán hozzák meg a döntéseiket. Felrajzolhatunk egy állapotábrát, ahol a két tengely a két játékos által termelt mennyiség. Hogyha feltesszük, hogy mindketten a másik előző lépésére optimalizálnak, akkor az állapotábrán a játék állapota konvergálni fog egy bizonyos ponthoz. Ez a pont a két legjobb válasz függvény metszéspontja. Ez logikus is, mert ebben az állapotban egyiküknek sem érdemes változtatni. Ez az egyensúlyi állapot, amit így két szereplő esetén ábrázolni is tudunk.

Véges cselekvéstér esetén Nash-egyensúly létezhet. Stratégiai formában nem biztos, hogy van.

Ideális játékosok, ha ki tudják számolni az egyensúlyi állapotot, rögtön oda ugranak. Ideális játékosok ki tudják számolni az egyensúlyi állapotot, ha létezik. Ez a stratégia értelmes és jó, feltéve, ha mindenki az egyensúlyba ugrik. Ha minden játékos ideális, akkor feltételezhetjük a többiekről is, hogy ugyanazt csinálják, mint mi. A gond csak az, hogy nem biztos, hogy csak egy egyensúly van. Előfordulhat több egyensúlyi állapot (ami ugye csak annyit jelent, hogy senkinek nem éri meg változtatni). De egyensúlyok között is lehet különbség, lehet, hogy valamelyik racionálisabb a másiknál: mindenkinek jobban (vagyis nem kevésbé) megéri az egyik egyensúly, mint egy másik. Még mindig előállhat olyan helyzet, ahol több egyensúly "holtversenyben" a legjobb. Ám sok esetben ezek csak azért egyenértékűek, mert a modell túl sok egyszerűsítést tartalmaz: ha a valós szituációt ismerjük, már lehet, hogy van ésszerű választás.

A Nash-egyensúly(oka)t a következőképpen lehet megtalálni: minden játékosnak kiszámítjuk a legjobb (pontosabban nem rosszabb) válasz függvényét az összes ellenfél által kialakított stratégiaprofilra (ezt kontinuum esetben, pl. a már említett Cournot játékban deriválással határozhatjuk meg). Ez kimenetelek halmaza lesz minden játékosra. A Nash egyensúlyok azok, amik az összes játékos halmazában benne vannak,

vagyis a metszet. Kevert stratégiák esetén a kifizetések várható értékeit kell vennünk, és ha ezzel számolunk, akkor is Nash-egyensúlyokat kapunk. Elméletileg mindig ki lehet ezeket számolni, bár lehet, hogy nem "hatékonyan", azaz csak "nagyon sok idő alatt" tudnánk kiszámolni, ami a gyakorlatban inkább azt jelenti, hogy nem tudjuk.

Ahhoz, hogy érdemes legyen az egyensúlyba ugrani, tudnunk kell a többi játékosról, hogy tökéletesek. Tudnunk kell még, hogy ők is tudják, hogy tökéletes a többi játékos, és hogy ezt tudják. Stb, stb, ha ezt a folyamatot a végtelenségig folytatjuk, akkor ezt a tudást nevezzük "köztudásnak" (common knowledge).

Eddig a játékok stratégiai formájával foglalkoztunk, ami a játékok egyik alapvető modellezése. Létezik egy másik modell is: az extenzív forma. Ebben a játékosok, valamint a köztudás modellje ugyanaz, mint a stratégiai formában. A különbség az, hogy a játékot egy fa gráffal reprezentáljuk, aminek minden csúcsa valamelyik játékos döntési helyzete, az élei pedig a játékos egy-egy döntése. A játékfa pontos matematikai definícióját mellőzném. Be kell vezetnünk a játékos függvényt, ami minden ponthoz hozzárendeli azt a játékost, akinek abban a pontban lépnie kell. Történelemnek nevezzük az élek egy meghatározott sorozatát: ez a játék egy lefolyása. A gráf végpontjai a kimenetelek, a preferenciák (vagy a von Neumann-Morgenstern hasznossági függvények) ezeken a pontokon vannak értelmezve. Ha a játékosok szimultán lépnek, az extenzív formában akkor is egymás utáni lépésekkel reprezentáljuk, csak bevezetjük az információs halmaz fogalmát: ez olyan pontok halmaza, amikhez ugyanazt a játékost rendeli a játékosfüggvény, és a játékos nem tudja, hogy az adott pontok közül melyiken van. Szükséges, hogy a halmazon belüli pontokból ugyanolyan élek induljanak ki, mivel ha különbözőek lennének a játékos cselekvési lehetőségei, már különbséget tudna tenni a pontok között. A szerencsét egy új játékosként reprezentáljuk, aki különböző lépéseit bizonyos valószínűségekkel teszi meg. Ekkor, mint a kevert stratégiánál a kimeneteleken egy valószínűségi eloszlásfüggvény jelenik meg, és a racionális játékosok számára értelmes törekvés a kifizetések várható értékének maximalizálása. Egy játékot legtöbbször többféleképpen is reprezentálhatunk extenzív formában.

Vajon mi történik, ha a játékosok elkezdik játszani az extenzív játékot? Hogyan fog alakulni a játék kimenetele? Lesz-e itt is egyensúly? Mivel a kettő lehet reprezentációja ugyanannak a játéknak, azt várjuk, hogy valami hasonló következtetést tudjunk levonni. A teljes információs játékok esetében (vagyis amikor a játékosok racionálisak és intelligensek, vagyis tökéletesek, valamint minden köztudott) kétféle módszerrel határozhatjuk meg az egyensúly(oka)t: az első módszer Cournot módszere, a már megismert kölcsönös legjobb válaszok módszere, a másik Stackelberg módszere, a

"visszafele indukció".

A visszafele indukció megismeréséhez tisztázni kell néhány fogalmat (a helyhiány, és az esszéforma miatt a matematikai definíciókat megint csak mellőzve). A részjáték a játék irányított fagráfjának egy részgráfja, vagyis egy adott nódusból kiinduló részfa. Vagyis minden ponthoz tartozik egy részjáték. A kezdőponthoz tartozó részjáték maga az eredeti játék, a végpontokhoz tartozó részjátékok esetében pedig a történelmek, a cselekvéstér üreshalmaz, csak az adott kimenetel maga a részjáték. Másképp mondva egy részjáték egy már elkezdett játék folytatása. A részjáték tökéletes egyensúly azt jelenti, hogy egy adott részjátékot játszva a játékosok a részjáték Nash-egyensúlyába érkeznek, akkor a teljes játéknak egy tökéletes részjáték egyensúlyát játszották meg. Véges játéknak a véges sok pontból álló gráffal reprezentálható játékot nevezzük. Véges horizontú játék olyan játék, amiben minden lehetséges történelem véges. Véges játék mindenképpen véges horizontú, de véges horizontú játék nem feltétlen véges: egy játék például nem az, ha egy pontból végtelen él indul ki. Bizonyítható, hogy véges tökéletes információs játéknak mindig létezik részjáték tökéletes egyensúlya.

A visszafele indukció során, mint a neve is mutatja, az utolsó döntési pontokból kell kiindulni: megjelöljük az adott helyen döntő játékos számára azt az útvonalat, ami a legtöbb kifizetést garantáló végpontba vezet. Az adott ponthoz hozzárendeljük az így kapott végpontot, a kifizetésekkel együtt (vagyis a lépést garantáltnak vesszük). Ezek után egy éllel "feljebb megyünk", és az eljárást megismételjük ezekkel a pontokkal is. Megtehetjük, hiszen ezek már olyan pontokba vezetnek, amikhez egyértelmű kimeneteleket rendeltünk hozzá. Az eljárást folytathatjuk egészen addig, amíg elérünk a kezdőpontba. Ha befejeztük, akkor minden pontból egy történelem fog kiindulni, ami az adott feltételezések mellett a ponthoz tartozó részjáték lefolyása, így a kezdőponthoz is egyértelműen tartozni fog egy történelem egy végponttal együtt. Kérdés, hogy a megtalált kimenetel egyensúly-e? Bizonyítható, hogy a kapott kimenetel részjáték tökéletes egyensúly.

Vajon mi a kapcsolat az extenzív formából, és a stratégiai formából kapott egyensúlyok között? A válasz az, hogy a részjáték tökéletes Nash-egyensúlyok részhalmazát alkotják az összes Nash-egyensúlynak, azaz a visszafele indukció egyfajta egyensúly finomító eljárás.

A játék stratégiai formájában redundancia van: ami a stratégiai formában több különálló kimenetelként jelenik meg, az sokszor extenzív formában ugyanaz a kimenetel. Lehet azonban redukálni a stratégiai formában feleslegesen előforduló ismétlődéseket. Két stratégiát kimenetel ekvivalensnek nevezünk, ha az ellenfelek

rögzített stratégiaprofilja mellett minden esetben ugyanazokat a kifizetéseket adják. Az ilyen stratégiapárokat tudjuk összevonni.

Felmerülhet a kérdés, hogy vesztünk-e valamilyen értékes információt ezen kimenetelek kidobásával? Vesztünk Nash-egyensúlyt. Ám ez azért nem baj, mert az összevont stratégiák egymással ekvivalensek, amikhez tartozó Nash-egyensúlyok egy ekvivalencihalmazba sorolhatók, így a redukció után minden ilyen ekvivalenciahalmazból marad egy-egy "képviselő" Nash-egyenúly, vagyis stratégiailag nem sérül a szituáció.

A visszafele indukció által kapott egyensúlyi kimenetel megjelenik a stratégiai formában is, de semmivel nem tűnik ki a többi egyensúly közül. Van azonban mód arra is, hogy stratégiai formában is megtaláljuk ugyanezt az egyensúlyt. Más szavakkal mondva van olyan módszer, ami a stratégiai formában megfelel a visszafele indukciónak, és ugyanazt a kimenetelt adja eredményül. Ez a dominált stratégiák fokozatos eliminálása meghatározott sorrendben. A módszer lényege ez: elindulunk egy egyik játékostól. Ha ennek van olyan stratégiapárja, hogy az egyik stratégia bármely "ellenséges" stratégiaprofilra jobb kifizetést ad, mint a másik, akkor ez a stratégia szigorúan dominálja a másikat. A dominált stratégiát elvetjük. Ezután a másik játékosra tesszük ugyanezt, csak a már megmaradt kimeneteleket vizsgáljuk. Egy idő után megmarad a részjáték tökéletes egyensúly. Ha nem tudunk ilyen szigorúan dominált párokat találni, csak domináltat (vagyis a kifizetéseknél megengedjük az egyenlőséget is), akkor is végigcsinálhatjuk az eljárást, csak akkor az eredmény nem lenne egyértelmű, hanem függne az eliminálás sorrendjétől.

Ez lenne röviden összefoglalva a félév anyaga, matematikai igényesség nélkül. A félév során eszközt kaptunk az ismeretterjesztő irodalom, valamint hollywoodi benyomások szűrésére, és kezelésére. Ami fontosabb, képességet kaptunk a játékok, „kis világok” felismerésére a minket körülvevő világban, és szemléletmódot kaptunk az ilyen jellegű problémák alapszintű átlátására.